Возможные решения задач

9 класс

**9-1.** **«Настоящий гонщик»** Длину прямолинейного участка (рис. 1) трассы найдем из закона равноускоренного движения автомобиля ()

*R*

Рис. 1

 . (1)

При этом в точке трассы скорость автомобиля будет равна

 . (2)

При движении автомобиля с постоянной скоростью по участку полуокружности , его ускорение в каждой точке будет направлено к центру окружности и по модулю равно , следовательно

 . (3)

Из (3) находим неизвестный радиус полуокружности

 . (4)

Время движения гонщика по полуокружности

 . (5)

Таким образом, полное время движения гонщика по трассе

 , (6)

А её длина

 . (7)

В соответствии с правилами округления (см. данные условия и справочные данные) все окончательные расчёты проводим с точностью до трёх значащих цифр.

Заметим, что в реальной гонке настоящие пилоты на поворотах держат ускорение (и скорость!) существенно меньше предельно возможного значения, поскольку в противном случае судьбу «настоящего» гонщика может решить любой случайный камешек на трассе…

**9-2.** **«Непонятное движение»** Согласно определению ускорение находится как

 . (1)

Используя данные условия, найдем приращение скорости тела на малом участке

 . (2)

Подставляя (2) в (1), получаем

 . (3)

Как следует из (3), при таком законе движения ускорение тела пропорционально кубу текущей координаты

 . (4)

Соответственно, искомое ускорение тела найдем из пропорции

 . (5)

Как следует из (5), рассматриваемое движение тела не является равноускоренным, поскольку модуль ускорения тела не остаётся постоянным в различных точках траектории, а кубически возрастает по мере роста координаты тела .

**9-3.** **«Бесконечная сетка»** Подадим ток силой от источника в узел цепи (рис. 2). В силу симметрии схемы по каждому из шести резисторов (в том числе и по ) данного узла потечет одинаковый ток растекания по сетке силой .

Рис. 2

*А*

*В*

*C*

В точке сетки, опять же в силу симметрии схемы, ток разделится поровну, следовательно, по резистору цепи будет течь ток растекания . Далее картина симметрии по токам растекания нарушается.

Теперь присоединим в точке цепи отрицательный электрод и будем «снимать» с сетки ток силой . В салу всё того же принципа симметрии схемы по каждому из шести резисторов в провод будет уходить ток силой , а по резисторам типа – силой . Далее картина симметрии по токам стекания также нарушается.

Теперь подадим на сетку одновременно и положительный, и отрицательный потенциалы в точках и , соответственно. Тогда в узел цепи будет входить ток силой , а из узла сетки будет выходить такой же по силе ток.

Согласно принципу суперпозиции источников тока (электрического поля) токи в каждой из ветвей сетки можно найти алгебраическим суммированием токов от каждого из источников (от втекающего и от вытекающего). Следовательно, ток через звено будет равен

 , (1)

а соответствующее падение напряжения

 . (2)

Аналогичные рассуждения приводят к результату

 . (3)

Тогда искомое сопротивление бесконечной цепочки ромбов найдем как отношение полного напряжения к силе тока

 . (4)

**9-4.**  **«Неравномерный нагрев»** Как следует из условия, из-за неравномерного нагрева стержня в пламени газовой горелки (рис. 3), температура его центральной части очень велика (), тогда как концы стержня «остались» при начальной (нулевой) температуре (вполне можно держать руками).

Рис. 3

Пусть удельная теплоёмкость материала стержня , плотность , площадь поперечного сечения стержня – . Тогда количество теплоты , запасённое в небольшом участке стержня длиной равно

 . (1)

Соответственно, количество теплоты, сообщенное газовой горелкой всему стержню, найдём как сумму

 , (2)

где – размерная физическая величина (), равная площади под графиком, т.е. площади полуокружности размерными радиусами и . Окончательно для количества теплоты получаем

 . (3)

Через некоторое время после прекращения работы газовой горелки, вследствие явления теплопроводности, стержень придет в состоянии теплового равновесия, при котором искомая температура всех его участков будет одинакова. Тогда количество теплоты, запасённой в стержне, можно записать как

 . (4)

Поскольку потерь теплоты нет, то справедливо уравнение теплового баланса

 , (5)

из которого с учетом (3) и (4) , получаем

 . (6)

Из (3) находим

 . (7)

Как следует из (7), после установления теплового равновесия (время порядка минуты для металлов), стержень в руках уже не удержишь! Подобные эффекты неравномерного нагрева легко наблюдать на кухне при разогреве пищи на металлической сковородке, при наливании горячего кофе в стакан и т.д. Будьте осторожны! ☺

**9-5.** **«Оптическое совпадение»** На первом этапе уберём зеркальный шар и методом построения побочной оптической оси найдём изображение точечного источника в тонкой линзе (рис. 4). Как следует из чертежа, координаты изображения при этом будут равны

 Заметим, что если мы сможем повернуть падающий луч на (т.е. в обратном направлении), то по принципу обратимости лучей он, преломившись в линзе, вернётся по той же траектории в исходную точку .

 Для этого зеркальный шар нужно расположить таким образом, чтобы угол падения (и отражения!) был равен нулю. Это достигается в том случае, когда падающий луч проходит через центр шара.

 Следовательно, шар необходимо расположить в точке с координатами , тогда все лучи, попавшие на него, отразятся «строго назад» и пойдут назад по своим же траекториям. После чего, преломившись в линзе, сойдутся в точке .

 На втором этапе можем заметить, что «повернуть лучи вспять» можно и симметричным способом, при котором лучи пойдут по симметричным относительно оптической оси траекториям (рис. 5). Для этого нужно расположить зеркальный шар так, чтобы он был подобен небольшому плоскому зеркалу в точке . Центр шара при этом будет левее на радиус (на две единицы) в точке .

 Таким образом, оптического совпадения источника и его изображения в системе можно добиться двумя способами: располагая шар в точках , и . При других расположениях зеркального шара добиться подобного совпадения не получится.

10 класс

**10-1.** **«Мощная артиллерия»** Промежуток времени складывается из времени полёта снаряда и времени равномерного движения звука назад по горизонтальной поверхности от места разрыва снаряда до места выстрела

. (1)

Пусть начальная скорость снаряда равна , тогда время его полёта найдём по известной формуле

. (2)

Поскольку дальность полёта снаряда равна

 , (3)

то время движения звука назад по горизонтальной поверхности найдём как

 . (4)

C учётом (2) и (4) выражение (1) для промежутка времени примет вид

 . (5)

Подставляя в (5) численные данные (хотя обычно мы так не поступаем…), получаем квадратное уравнение относительно начальной скорости снаряда

 . (6)

Решая безразмерное квадратное уравнение в скобках (т.е. временно «опуская» размерность), находим два корня

. (7)

Отбрасывая отрицательный корень как не имеющий физического смысла, получаем значение начальной скорости движения снаряда

 . (8)

Подставляя полученное значение (8) в выражение (2) находим искомое время полёта снаряда

 . (9)

В соответствии с правилами округления (см. данные условия и справочные данные) все окончательные расчёты проводим с точностью до трёх значащих цифр.

Как следует из (9) время полета снаряда равно времени движения звука назад ()! Это объясняется тем, что при данном выстреле горизонтальная проекция скорости снаряда () в течение всего полёта равна скорости звука .

Интересно, что при таких параметрах выстрела дальность полёта снаряда будет равна , что является вполне реальной величиной для современных дальнобойных орудий.

**10-2.** **«Подвижная чаша»** При соскальзывании шайбы по дуге (до нижней точки) чаша будет оставаться неподвижной, поскольку шайба будет «вдавливать» её в угол (рис. 6). Следовательно, скорость шайбы в точке можно найти из закона сохранения энергии

 . (1)

Далее ситуация изменится, поскольку проекция силы давления шайбы на чашу станет положительной – она придёт в движение.

 В момент максимального подъёма на высоту (рис. 7) шайба «замирает» на чаше в некоторой точке , значит, их скорости относительно земли в этот момент будут одинаковы (обозначим их через ).

Запишем закон сохранения импульса для системы «чаша+шайба», которая замкнута в горизонтальном направлении

 . (2)

Кроме того, поскольку трения в системе нет, то для этой же системы справедлив закон сохранения энергии

 . (3)

Из системы (2) + (3) находим

 . (4)

Далее шайба по чаше поедет «назад», но при этом продолжит разгонять чашу до точки , поскольку сила проекция силы давления шайбы на чашу по-прежнему положительна.

Следовательно, максимальная скорость чаши (но не шайбы!) будет достигаться в точке при движении шайбы *назад* (рис. 8). Далее шайба будет тормозить чашу вплоть до её полной остановки. Этот процесс на гладкой плоскости будет продолжаться бесконечно.

Запишем законы сохранения импульса и энергии для точки при обратном движении шайбы. Пусть в этот момент скорости чаши и шайбы относительно земли будут равны по модулю и , соответственно. Тогда имеем

 . (5)

Для решения системы (5) преобразуем её второе уравнение к виду

 , (6)

и разделим на первое уравнение. В результате этой нехитрой процедуры получим систему линейных уравнений (7), которая быстрее решается

 . (7)

Из системы (7) находим искомую максимальную скорость чаши

 . (8)

Что касается шайбы, то её максимальная скорость достигается в другом состоянии, а именно – в нижней точке чаши при движении вправо, когда чаша на мгновение останавливается. При этом система возвращается в «исходное состояние», когда скорость шайбы равна начальной скорости при отрыве чаши от стенки

 . (9)

**10-3.** **«Тригонометрия – раздел физики!»** а) Изобразим силы, действующие на шарик в положении равновесия (рис. 9). При равновесии тела векторная сумма сил, действующих на него, равна нулю (правило сил для равновесия), следовательно, в нашем случае

*m*

Рис. 9

 . (1)

В проекциях на горизонтальную и вертикальную оси координат (1) примет вид

 . (2)

Решая систему (2) методом подстановки, находим значения сил реакции опоры и натяжения нити

 . (3)

б) Теперь воспользуемся правилом моментов сил (рычага), приведенном в справочных данных к условиям задач

 . (4)

Запишем моменты всех сил относительно точки системы (при равновесии данную точку можно выбирать произвольно). Поскольку сила натяжения нити проходит через точку , то её момент равен нулю. Следовательно

 , (5)

где – длина нити. Из (5) получаем

 . (6)

Заметим, что если записать моменты всех сил относительно точки на продолжении вектора , то можно получить аналогичное выражение и для силы

 . (7)

в) Сравнивая выражения (6) и (7) для силы реакции и силы натяжения нити с (3), можем сделать вывод, что это возможно только тогда, когда

 . (8)

Поскольку правило сил и правило моментов сил при равновесии были получены физиками экспериментально, то можно утверждать, что данное тригонометрическое тождество следует из опыта!

Теперь можно иначе взглянуть на известную цитату Ф. Энгельса о том, что «математика возникла из практических нужд людей», т.е. из … физики! ☺

г) Расчёты для приведенных данных с точностью до двух значащих цифр дают

 . (9)

**10-4.** **«Сильная точка»** Запишем уравнение состояния идеального газа в форме Клапейрона – Менделеева

Рис. 10

 . (1)

Преобразуем (1) к виду предложенных безразмерных координат

 . (2)

Из (2) видно, что изобарный процесс в данных координатах является прямой, выходящей из начала координат, с угловым коэффициентом равным

 . (3)

Поскольку угловой коэффициент изобары обратно пропорционален давлению идеального газа, то его максимальному давлению будет соответствовать точка с минимальным угловым коэффициентом наклона. Следовательно, на графике необходимо построить касательную к дуге процесса, выходящую из начала координат (рис. 10).

Из прямоугольного треугольника по теореме Пифагора, с учетом того, что радиус окружности на рисунке равен единице, найдем

*.* (4)

Соответственно, координаты точки будут равны

 ; (5)

 . (6)

Используя полученные координаты, из (2) найдем

 . (7)

Для нахождения точки на графике соединим точку (рис. 11) с началом координат и найдём точку её пересечения с дугой .

Рис. 11

Поскольку точки и лежат на одной изобаре, то и давления идеального газа в этих состояниях будет одинаковым ().

 Это давление несложно вычислить, находя из графика координаты точки

 . (8)

**10-5.** **«Упругая перегородка»** Из условия равновесия подвижной перегородки следует, что сила давления на неё газа слева должна быть равна силе давления жидкости справа.

Следовательно

 , (1)

где – площадь перегородки, – атмосферное давление. После сокращения на , находим, что давление сжатого газа в левой части сосуда равно

 . (2)

Рис. 12

 Из закона Бойля-Мариотта (температура постоянна) для идеального газа в левой части сосуда (рис. 12) имеем

 , (3)

где , – искомый объём налитой жидкости (перегородка тонкая, её объёмом можно пренебречь).

Из (3) получим величину объёма налитой жидкости в сосуд

 . (4)

Расчёт по формуле (4) даёт

. (5)

Как видим из (5) смещение перегородки под действием жидкости относительно небольшое (упругая!), поскольку в сосуд вошло только дополнительного объёма жидкости ().

11 класс

**11-1.** **«Быстрая частица»** Время движения частицы от вылета до остановки есть сумма времён равномерного движения и равноускоренного торможения

 . (1)

Выражение (1) «неудобно» для анализа, поскольку скорость частицы присутствует как в числителе одной дроби, так и в знаменателе другой. Поэтому для поиска минимального времени воспользуемся методом полного квадрата. Для этого добавим и вычтем в (1) удвоенное произведение , тогда (1) примет «удобный» для анализа вид

 . (2)

Поскольку минимальное значение квадрата равно нулю, то, как следует из (2), минимальное время движения частицы равно

 . (3)

Это время достигается при таком значении скорости частицы, когда выражение в скобках равно нулю, т.е.

 . (4)

Из (4) следует, что это происходит при скорости частицы

 . (5)

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) все окончательные расчёты приводим с точностью до трёх значащих цифр.

**11-2.** **«Сосуд – попрыгун»** Можно показать, что отрыв куба начинается в тот момент, когда шайба занимает положение, указанное на рисунке 13.

Пусть в этот момент скорость центра куба массы  равна , а  – есть скорость шайбы массы  относительно куба, направленная горизонтально. Так как в системе отсутствует трение, то сохраняется проекция полного импульса системы на горизонтальное направление

, (1)

а также выполняется закон сохранения энергии

. (2)

В мгновенной системе отсчета, связанной с кубом, шайба движется со скоростью  по окружности радиуса  и уравнение ее движения в проекции на радиальное направление имеет вид

. (3)

Очевидно, что условие отрыва куба от плоскости стола в соответствие с третьим законом Ньютона имеет вид

. (4)

Подставляя (4) в (3), найдем величину скорости

 . (5)

Выразим из (1) величину скорости куба

 , (6)

и подставим её в (2), предварительно умножив его на два

. (7)

С учётом (5) выражение (7) принимает вид

 . (8)

Избавляясь в (8) от знаменателя, раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим

. (9)

Вновь используя (5), найдём искомое значение минимальной скорости шайбы в начальный момент времени

 . (10)

**11-3.** **«Дуговой цикл»** Для нахождения коэффициента полезного действия цикла

Рис. 14

 (1)

необходимо вычислить работу , совершенную газом за весь цикл, и количество теплоты , полученное идеальным одноатомным газом от нагревателя.

 Работа газа за весь цикл равна площади фигуры , ограниченной циклом на рисунке 14, где площадь одной клеточки составляет размерную величину . Вырежем мысленно фигуру на рисунке и добавим её к фигуре – получится четыре целых клеточки площадью . Соответственно, площадь всей фигуры будет равна , т.е. восьми клеточкам, выделенным на рисунке 14

 . (2)

 Для нахождения точек подключения и отключения нагревателя к рабочему телу необходимо найти точки касания цикла адиабатами. Для этого заметим, что точки и лежат на одной изотерме, т.к.

 . (3)

Аналогичное соображение справедливо и для точек и . Поскольку адиабата на графике идёт «круче» изотермы, то, используя (3), можем сделать вывод, что нагреватель работает на участке цикла, а на участке – к рабочему телу тепловой машины подключается холодильник.

 Для нахождения количества теплоты , полученного от нагревателя, воспользуемся первым началом термодинамики

 , (4)

где – изменение внутренней энергии газа на участке цикла, а – работа газа на этом же участке.

 Работа газа равна площади фигуры, (см. рис. 14), которую вновь найдем, интегрируя «по клеточкам» (до оси абсцисс)

 . (5)

Изменение внутренней энергии идеального одноатомного газа на участке (с учетом уравнения состояния Клапейрона – Менделеева)

 . (6)

Подставляя (2), (5) и (6) в формулу для КПД (1), получаем окончательную формулу

 . (7)

Заметим, что при тех же температурах и холодильника и нагревателя идеальная тепловая машина (машина Карно) имела бы КПД

 . (8)

Как следует из (8) , до «идеала» по значению даже такому «красивому» дуговому циклу еще далеко …☺

**11-4.** **«Шайба Лоренца»** Рассмотрим движение шайбы по наклонной плоскости (будем считать, что она «горизонтальна»).

При таком подходе вектор следует заменить на т.н. «эффективный» вектор , действующий вниз вдоль наклонной плоскости (к её основанию) и равный по модулю . Данное направление называется условной (эффективной) вертикалью.

Рис. 15

На начальном этапе (при небольшой скорости) шайба будет скользить вниз по условной вертикали (к основанию наклонной плоскости), поскольку на этом этапе сила Лоренца сравнительно мала.

Однако, по мере разгона шайбы будет увеличиваться сила Лоренца, которая, согласно правилу левой руки, будет всё сильнее «отклонять» шайбу в сторону (влево на рисунке 15).

Заметим, что при этом будет увеличиваться вертикальная проекция силы Лоренца (рис. 15), притормаживающая шайбу. Соответственно, при некоторой скорости разгон шайбы прекратится, т.е. её скорость перестанет изменяться как по модулю, так и по направлению.

Поскольку на шайбу действуют три силы (см. рис. 15), то в установившемся режиме () их сумма должна быть равна нулю.

Следовательно

 . (1)

Поскольку сила трения скольжения направлена против вектора скорости , а сила Лоренца перпендикулярна ему, то треугольник сил на рисунке 15 будет прямоугольным.

Запишем для него теорему Пифагора

 *.* (2)

Откуда находим модуль установившейся скорости шайбы

  *.* (3)

Поскольку скорость – векторная величина, то обязательно необходимо указать её направление на наклонной плоскости. Для этого из прямоугольного треугольника сил вычислим угол с «вертикалью»

 . (4)

Время установления стационарного (установившегося) режима можно оценить (от школьников не требуется) как отношение максимальной скорости к начальному значению ускорения шайбы

  *.* (5)

Как следует из (5), при данных параметрах задачи скорость шайбы достаточно быстро устанавливается, после чего шайба движется равномерно и прямолинейно под углом к «условной» вертикали.

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) все окончательные расчёты приводим с точностью до двух значащих цифр, поскольку две значащие цифры содержатся во всех данных условия, за исключением в справочных данных (три значащие цифры).

**11-5.** **«Маятник Кулона»** Предположим, что бусинка сместилась по направляющей на малое расстояние , например, вправо (рис. 16).

Рис. 16

В этом положении на неё будет действовать возвращающая сила

 . (1)

Преобразуем (1) с учетом малости

 . (2)

Из (2) следует, что при малых колебаниях возвращающая сила, действующая на бусинку, прямо пропорциональна её смещению от положения равновесия

, (3)

где есть некоторый постоянный «упругий» коэффициент, являющийся аналогом коэффициента упругости пружины.

Используя (3), запишем основной закон динамики для движения бусинки по направляющей в вакууме

 . (4)

Как следует из (4), бусинка будет совершать по направляющей гармонические колебания с циклической частотой и периодом

 . (5)

Расчёт для приведенных значений даёт

 . (6)

Примерно такое же значение периода колебаний бусинки наблюдается при работе звонка Франклина в реальных опытах по электростатике, только при этом она еще издаёт мелодичный звон, ударяя по металлическим колокольчикам.

*P.S. Уважаемые коллеги! Если решения некоторых задач, представленные участниками олимпиады (а они – люди творческие!), отличаются от авторских, и при этом получен правильный ответ, то (после внимательного прочтения!) подкорректируйте «Схему оценивания» и смело ставьте баллы! Дети порой мыслят нестандартно, но, по сути, верно. Помните, что наша основная задача – не потерять юное дарование на начальных этапах олимпиады.* ☺

*По всем вопросам при проведении теоретического тура олимпиады обращаться по телефону: +* 375 29 766 12 87 *(Леонид Григорьевич Маркович).*