Второй этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика».
2021/2022 учебный год

8 класс

1. Ответ: 7 файлов.

Решение. Пусть x – общее число файлов на флешке; y – число зараженных файлов. Из условия "Если Вовочка вылечит один зараженный файл, то доля зараженных файлов составит 24% от числа всех файлов" получаем $y - 1 = 0{,}24x$. Из условия " Если Вовочка удалит один зараженный файл, то доля зараженных файлов составит 25%" следует, что $y - 1 = 0{,}25(x - 1)$, т.к. при удалении зараженного файла общее число файлов на флешке тоже уменьшается. Поскольку левые части двух уравнений совпадают, приравняем правые части: $0{,}24x = 0{,}25(x–1)$; после преобразований получим $0{,}25 = 0{,}01x$ или $x = 25$. Теперь можно легко найти y, например, из первого уравнения: $y - 1 = 0{,}24\times25 = 6$, откуда $y = 7$.

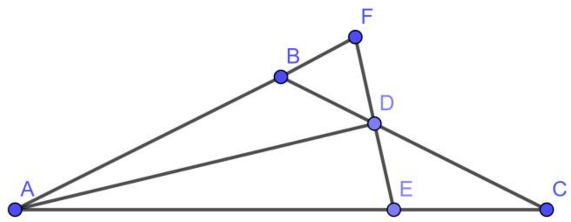
2. **Ответ**: $360360 = 5\times7\times8\times9\times11\times13$.

Решение. Пусть искомое число делится на следующие последовательные натуральные числа

$$n, n+1, n+2, ..., n+14.$$

Заметим, что среди этих чисел обязательно найдется число делящееся на 5, а следовательно и искомое число должно делится на 5. Аналогично среди этих чисел найдутся числа, делящиеся на 7, 8, 9, 11 и 13, а значит и искомое число должно делится на 7, 8, 9, 11 и 13. Поскольку числа 5. 7, 8, 9, 11 и 13 не имеют общих делителей, то искомое число должно делится и на число $360360 = 5\times7\times8\times9\times11\times13$. Очевидно, что наименьшее такое число – это само число 360360. Непосредственной проверкой легко убедится, что оно делится на все натуральные числа от 1 до 15.

3. **Решение**. 1) Т.к. $\angle ABC = 108°$ и треугольник ABC равнобедренный, то $\angle BAC = \angle ACB = ½ (180° - 108°) = 36°$.



2) Т.к. AD – биссектриса угла BAC, то $\angle DAE = \angle DAB = ½ \angle BAC = 18°$.

3) В треугольнике ADE угол $\angle AED = 180° - \angle ADE - \angle DAE = 180° - 18° - 90° = 72°$.

4) Угол $\angle DEC$ является внешним к углу $\angle AED$, откуда $\angle DEC = 180° - \angle AED = 180° - 72° = 108°$.

5) В треугольнике DEC угол $\angle EDC = 180° - \angle DEC - \angle ECD = 180° - 108° - 36° = 36°$. Т.к. $\angle EDC =\angle ECD = 36°$, то треугольник DEC равнобедренный, откуда $DE = EC$.

6) В треугольнике EAF отрезок AD является одновременно биссектрисой и высотой, следовательно, треугольник EAF равнобедренный, откуда, во-первых, $\angle AFD = \angle AED = 72°$, во-вторых, AD – медиана, т.е. $DF = DE = EC$.

7) Угол $\angle FBD$ является внешним к углу $\angle ABC$, откуда $\angle FBD = 180° - \angle ABC = 180° - 108° = 72°$.

8) В треугольнике BFD угол $\angle FBD = \angle BFD = 72°$, следовательно, треугольник BFD равнобедренный, откуда, $BD = DF = EC$, что и требовалось доказать.

4. Решение. Пусть сумма всех красных чисел равна x, а сумма всех синих чисел равна y, тогда сумма всех чисел на окружности равна $x + y$. Рассмотрим три подряд стоящие числа a, b, c. Если число b красное, то $b = a + c$ (*). Если число b синие, то $b = (a + c)/2$, откуда $2b = a + c$ (**). Запишем равенства вида (*) и (**) для всех троек подряд идущих чисел и просуммируем их. В правой части получится удвоенная сумма всех записанных чисел (поскольку каждое число будет суммироваться два раза, один раз как соседнее слева, второй раз как соседнее справа), т.е. справа получим $2(x + y)$. Слева получится сумма всех красных чисел из равенств (*) – это x, и удвоенная сумма всех синих чисел из равенств (**) – это $2y$. Итого получаем, что $x + 2y = 2(x + y)$, откуда следует, что $x = 0$.

5. Ответ: нет, нельзя.

Решение. Заметим, что общее количество клеток доски – нечетное число. Предположим, что замощение доски возможно, тогда оно должно содержать нечетное количество прямоугольников 1×3. Раскрасим в черный цвет 1-ую, 4-ую, 7-ую, ..., 2020-ую горизонтали доски. Всего закрашено 674 горизонтальных линии. Т.е. всего закрашено 2021×674 клеток – четное число. Заметим, что доминошки 1×2, расположенные горизонтально, всегда содержат четное число закрашенных клеток: или 0, или 2. Значит, с одной стороны, суммарно все прямоугольники 1×3 должны содержать четное число закрашенных клеток. С другой стороны, каждый прямоугольник 1×3 расположен вертикально и, следовательно, содержит ровно одну закрашенную клетку. Как мы показали, общее число прямоугольников должно быть нечетным числом, а значит, общее количество закрашенных клеток во всех прямоугольниках 1×3 должно быть нечетно, противоречие.

Второй этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика».
2021/2022 учебный год

9 класс

1. Ответ: 11 часов.

Решение. Пусть t ч – время поездки. Тогда $t/2$ часов Алёна разговаривала по телефону, и еще столько же времени телефон находился в режиме ожидания. За один час разговора расходуется 1/6 частя заряда телефона, тогда за $t/2$ часов израсходуется $t/12$ часть заряда. Аналогично, часть ожидания потребляет 1/66 часть заряда, тогда за $t/2$ часов ожидания будет использована $t/132$ часть. Поскольку за время поездки телефон был разряжен полностью, это означает что был использован весь заряд, т.е $t/12 + t/132 = 1$. Преобразовав последнее выражение, получим $(12 + 132)t = 12\times132$ или $144t = 1584$, откуда $t = 11$.

2. Ответ: 1.

Решение. Пусть n – число, которое делили Боря и Лёня; x и y – соответственно частное и остаток, которые получил Боря при делении числа n на 20; z и t – соответственно частное и остаток, которые получил Лёня при делении числа n на 21.

Из определения деления с остатком и условия, получаем:

$$n = 20x + y,\ 0 \le y \le 19;$$
$$n = 21z + t,\ 0 \le t \le 20;$$
$$x + t = 22.$$

Выразив x из последнего равенства и подставив его в первое выражение, получим

$$n = 20\ (22 – t) + y = 440 – 20\ t + y = 21\times20 + 20 – 20\ t + y.$$

Приравняв два различных выражения для n получим:

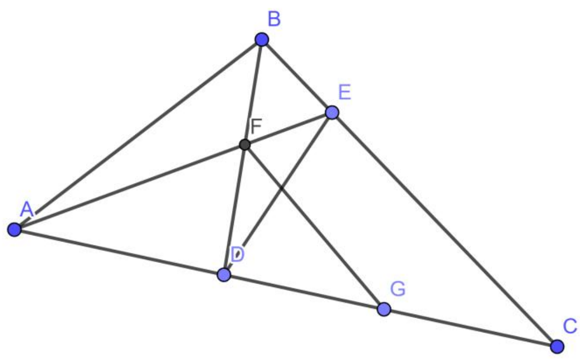
$$n = 21\times20 + 20 – 20\ t + y = 21z + t, \text{ откуда, } 21\times20 + 20 + y = 21z + 21t = 21\ (z + t).$$

Выражение в правой части делится на 21, следовательно и $20 + y$ должно делится на 21. Из условия $0 \le y \le 19$ получаем, что единственное подходящее y – это 1.

Замечание. Ответ 1 можно получить следующим образом: выбрать любой остаток t, найти по нему x, зная x, найти диапазон чисел, в котором должно лежать число n: от $20x$ до $20x + 19$ и из этих чисел выбрать то, которое при делении на 21 дает остаток t. Найдя таким образом n и поделив его на 20, получим остаток 1. Однако, это решение не является полным, т.к. из него не следует, что других остатков быть не может. При таком решении надо перебрать все возможные значения t и показать, что всегда ответ будет 1.

3. Ответ: 90°.

Решение. 1) Т.к. треугольник BEF равносторонний, то все его стороны равны т.е. $BE = BF = FE$, и все углы равны по 60 градусов.



2) В прямоугольном треугольнике DEB (DE перпендикулярен BC) угол $\angle BDE = 90° – \angle DBE = 90° – 60° = 30°$, $\angle DEF = \angle DEB – \angle BEF = 90° – 60° = 30°$.

3) Т.к. $\angle BDE = \angle DEF = 30°$, то треугольник DFE – равнобедренный, откуда $FD = FE$.

4) Т.к. $FE = BF$, то $BF = FD$, а значит F – середина отрезка BD.

5) Пусть G – середина DC. Тогда $GD = ½\ DC = AD$, то есть D – середина AG.

6) FG – средняя линия треугольника BDC, поэтому $FG \parallel BC$, откуда $\angle DFG = \angle DBC = 60°$, как соответственные углы при секущей BF.

7) $\angle AFD = \angle BFE = 60°$, как вертикальные.

8) Рассмотрим треугольник AFG: FD является медианой, т.к. $GD = AD$ и биссектрисой, т.к. $\angle AFD = \angle DFG = 60°$. Следовательно, треугольник AFG – равнобедренный, а FD – его высота, то есть $\angle ADB = \angle ADF = 90°$.

4. Ответ: 111.

Решение. Заметим, что в результате описанных действий из каждой строки и каждого столбца таблицы, будет выписано ровно по одному числу. Число, записанное в i-ой сверху строке в j-ом слева столбце, можно представить в следующем виде: $(i - 1)\times 6 + j$. Поскольку все числа в таблице представимы в указанном виде, то и выписанные числа будут иметь соответствующий вид, а значит искомая сумма может быть записана в виде $6A + B$. Найдем A и B по-отдельности. Рассмотрим первый столбец. В нем все числа будут иметь вид $6(i - 1) + 1$, поэтому, какое бы число из первого столбца не было бы выписано в сумму B (а какое-то число из этого столбца точно будет выписано), оно даст единицу. Аналогично, число из второго столбца в сумму B даст 2 и т.д. Таким образом, $B = 1 + 2 + 3 + ... + 6 = 21$. Теперь найдем A. Рассмотрим первую строку таблицы. Числа в первой строке имеют вид $0\times 6 + j$. Значит, какое бы мы число не выписали из первой строки, оно даст в сумму A слагаемое 0. Аналогично, число из второй строки в A даст 1 и т.д. Таким образом, $A = 0 + 1 + 2 + ... + 5 = 15$. Значит, искомая сумма равно $15\times 6 + 21 = 90 + 21 = 111$.

5. Ответ: таких n не существует.

Решение. Если $n = 2$, то последовательные натуральные числа имеют вид k и $k+1$ ($k \geq 1$). Покажем, что их произведение не может быть полным квадратом. Имеет место следующая цепочка неравенств:

$$k^2 < k(k + 1) = k^2 + k < k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Таким образом, произведение $k(k + 1)$ лежит строго между двумя квадратами последовательных натуральных чисел, и, следовательно, полным квадратом натурального числа быть не может.

Если $n = 3$, то последовательные натуральные числа имеют вид k, $k+1$ и $k+2$ ($k \geq 1$). Тогда, как бы мы не расставляли эти числа на окружности, число $k+1$ будет обязательно соседствовать с числом k и, как было показано ранее, их произведение не будет являться полным квадратом.

Пусть $n \geq 4$. Тогда последовательные натуральные числа будут иметь вид k, $k+1$, ..., $k+n-1$. Рассмотрим первые 4 из них: k, $k+1$, $k+2$, $k+3$. Среди этих четырех последовательных натуральных чисел обязательно найдется нечетное число, обозначим его A, и число, дающее остаток 2 при делении на 4, обозначим его B. Заметим, что если произведение двух чисел дает квадрат натурального числа, то степени двоек в разложении этих двух чисел на простые множители имеют одинаковую четность. Поскольку у нас произведения всех соседних чисел на окружности должны быть полными квадратами, то все числа на окружности должны иметь одну и ту же четность степеней двойки в разложении на простые множители. Однако, наши последовательные числа k, ..., $k+n-1$ таким свойством не обладают. Действительно, число A имеет в своем разложении на простые множители двойку в нулевой степени, т.е. в четной степени, а число B – двойку в первой степени, т.е. в нечетной. Следовательно, числа k, ..., $k+n-1$ нельзя расставить на окружности, как требуется по условию.

Второй этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика».
2021/2022 учебный год

10 класс

1. Ответ: за 2021 суток.

Решение. Пусть x литров в сутки выпивает 1 слон; y литров в сутки наливают ключи воды в озеро; z литров – изначальный объем озера.

К концу первых суток в озере должно было бы стать $y + z$ литров воды и этот объем 1011 слонов выпивают за одни сутки, а за одни сутки они выпивают $1011x$ литров, следовательно,

$$y + z = 1011x.$$

Аналогично к концу 47 суток в озере должно было бы стать $y + 47z$ литров воды, этот объем 22 слона выпивают за 47 суток. За одни сутки 22 слона выпивают $22x$ литров, а за 47 суток 22 слона выпивают $47\times 22x = 1034x$. Следовательно,

$$y + 47z = 1034x.$$

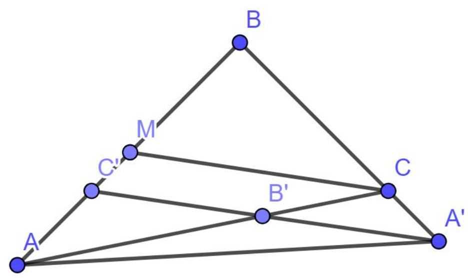
Вычитая из второго уравнения первое, получим $46z = 23x$ или $x = 2z$. Подставив это выражение в первое уравнение найдем, что $y + z = 2022z$, откуда, $y = 2021z$.

Пусть один слон выпивает озеро за t суток. Тогда к концу суток с номером t в озере должно было быть $y + tz$ литров воды, однако весь этот объем выпивает 1 слон, за t суток, откуда $y + tz = tx$. Подставляя выражения для x и y, получим, $2021z + tz = 2tz$ или $2021 + t = 2t$, откуда $t = 2021$.

2. Ответ. Четная цифра.

Решение. Заметим, что среди перемножаемых чисел 404 кратны 5, причем 80 из них кратны 5^2, 16 кратны 5^3 и 3 числа кратны 5^4. Кроме того среди перемножаемых чисел 1010 четных чисел. Значит, число n делится на 10^{503}, но не делится на 10^{504}. Пусть $m = n / 10^{503}$. Тогда первая справа цифра числа m и будет первой справа ненулевой цифрой числа n. Заметим, что число m гарантированно делится на $2^{(1010-503)} = 2^{507}$, а значит m четное, и, следовательно, первая справа цифра числа m четная.

3. Решение. 1) Т.к. прямая $A'C'$ параллельна прямой CM, то $\angle BMC = \angle BC'A'$ и $\angle BCM = \angle BA'C'$ как соответственные при секущих AB и $A'B$ соответственно. Следовательно, треугольник BCM подобен треугольнику $BA'C'$. Из подобия треугольников следует, что $BM : BC' = MC : A'C'$. Откуда, $A'C' : BC' = MC : ½\, AB$.



2) Т.к. прямая $A'C'$ параллельна прямой CM, то $\angle AMC = \angle AC'A'$ и $\angle ACM = \angle AB'C'$, как соответственные при секущих AB и AC соответственно. Следовательно, треугольник AMC подобен треугольнику $AC'B'$. Из подобия треугольников следует, что $AM : AC' = CM : B'C'$. Откуда, $B'C' : AC' = MC : ½\, AB$.

3) Из приведенных выше равенств заключаем, что $A'C' : BC' = B'C' : AC'$, следовательно, $BC'\cdot B'C' = A'C'\cdot AC'$.

4) Т.к. углы $\angle BC'B'$ и $\angle AC'A'$ вертикальные, то $\angle BC'B' = 180° - \angle AC'A'$, откуда, $\sin\angle AC'A' = \sin\angle BC'B'$.

5) Таким образом, $S_{AA'C'} = ½\, A'C'\cdot AC' \sin\angle AC'A' = ½\, BC'\cdot B'C' \sin\angle BC'B' = S_{BB'C'}$. Ч.т.д.

4. Ответ: $n(n^2+1)/2$.

Решение. Заметим, что в результате описанных действий из каждой строки и каждого столбца таблицы будет выписано ровно по одному числу. Число, записанное в i-ой сверху строке в j-ом слева столбце, можно представить в следующем виде: $(i-1)\times n + j$. Поскольку все числа в таблице представимы в указанном виде, то и выписанные числа будут иметь соответствующий вид, а значит искомая сумма может быть записана в виде $nA + B$. Найдем A и B по-отдельности. Рассмотрим первый столбец. В нем все числа будут иметь вид $n(i-1)+1$, поэтому, какое бы число из первого столбца не было бы выписано в сумму B (а какое-то число из этого столбца точно будет выписано), оно даст единицу. Аналогично, число из второго столбца в сумму B даст 2 и т.д. Таким образом, $B = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2$. Теперь найдем A. Рассмотрим первую строку таблицы. Числа в первой строке имеют вид $0\times n + j$. Значит, какое бы мы число не выписали из первой строки, оно даст в сумму A слагаемое 0. Аналогично, число из второй строки в A даст 1 и т.д. Таким образом, $A = 0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) = n(n-1)/2$. Значит, искомая сумма равна $n(n+1)/2 + n \times n(n-1)/2 = n(n^2+1)/2$.

5. Ответ: 25.

Решение. Пусть максимальное количество отрезков, выходящих из одной вершины, равно n. Рассмотрим вершину A из которой выходит n отрезков. Раскрасим в красный цвет все такие вершины, которые соединены отрезком с вершиной A. В красный цвет будет раскрашено ровно n вершин. Заметим, что две вершины, раскрашенные в красный цвет, не могут быть соединены отрезком, т.к. в противном случае вместе с вершиной A они образуют треугольник. Таким образом, у каждого проведенного отрезка по крайней мере одна вершина не окрашена в красный цвет. Оценим, какое максимальное количество отрезков мы можем провести из неокрашенных вершин. Всего неокрашенных вершин $(10-n)$ и из каждой такой вершины мы можем провести не более n отрезков (по определению n). Тогда всего отрезков, у которых хотя бы одна вершина не окрашена в красный цвет, не более чем $n(10-n)$, а значит, и всего проведенных отрезков не более $n(10-n)$. По неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$n(10-n) \le ((n + 10 - n)/2)^2 = 5^2 = 25.$$

Покажем, что 25 отрезков, удовлетворяющих условию задачи, можно провести. Раскрасим 5 вершин в красный цвет, а остальные 5 вершин – в синий. Соединим каждую красную вершины с каждой синей вершиной отрезком. Легко убедиться, что всего будет проведено 25 отрезков. При этом, какие бы три вершины мы не выбрали, среди них обязательно хотя бы 2 будут одного цвета, и, следовательно, не будут соединены отрезком. Значит, проведенные отрезки не будут образовывать треугольники.

Второй этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика». 2021/2022 учебный год

11 класс

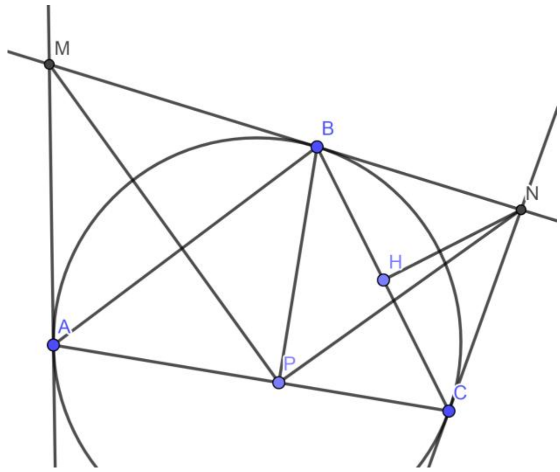
1. Ответ: Нет, не могло.

Решение. Пусть друзья внесли a, b, c, d и e рублей соответственно. Тогда общая сумма S внесённых денег равна $a + b + c + d + e$.

Предположим, что каждые два друга внесли меньше, чем $S/3$ рублей. Тогда каждое из чисел $a + b$, $b + c$, $c + d$, $d + e$ и $e + a$ меньше $S/3$. Складывая, получим $2(a + b + c + d + e) < 5S/3$, то есть $6S < 5S$. Противоречие. (Можно рассмотреть всевозможные пары друзей, тогда получается аналогичное неравенство $4S < 10S/3$.)

2. Решение. Пусть число $n = 2^k m$, где число m нечетное. Если d некоторый нечетный делитель числа n^2, то d является делителем числа m^2, при этом m^2/d нечетное число, а если $d \neq m$, то $d \neq m^2/d$. Все нечетные делители числа n^2 кроме m можно разбить на пары вида $(d, m^2/d)$. Сумма чисел внутри пары – четное число, тогда и сумма всех нечетных делителей числа n^2 кроме m тоже четное число. Тогда сумма всех нечетных делителей числа n^2 (включая m) нечетное число. Сумма всех четных делителей числа n^2 очевидно четное число. Следовательно, сумма всех делителей числа n^2 нечетное число.

3. Решение. 1) Рассмотрим треугольник ABC. Обозначим $AB = x$, $BC = y$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$.



2) По теореме об угле между касательной и хордой получаем, что $\angle BAM = \angle ABM = \angle ACB = \gamma$, аналогично $\angle BCN = \angle CBN = \angle BAC = \alpha$.

3) Рассмотрим прямоугольный треугольник BCP (т.к. BP – высота треугольника ABC). Из определения косинуса угла следует, что $PC = BC \cos \angle BCP = y \cos \gamma$. Аналогично, при рассмотрении прямоугольного треугольника ABP получаем, что $AP = x \cos \alpha$.

4) Рассмотрим треугольник BNC. По свойству касательных $BN = NC$, следовательно треугольник BNC – равнобедренный. Из вершины N на сторону BC опустим высоту NH. По свойству равнобедренного треугольника NH – медиана треугольника BNC, откуда $HC = ½\, BC = y/2$.

5) Рассмотрим прямоугольный треугольник NHC. Из определения косинуса угла следует, что $NC = HC / (\cos \angle HCN) = (y/2) / (\cos \alpha) = y / (2 \cos \alpha)$.

6) Аналогично, рассматривая треугольник BAM, получим $AM = x / (2 \cos \gamma)$.

7) Треугольники AMP и CNP подобны по второму признаку подобия треугольников: $\angle MAP = \angle BAM + \angle BAC = \gamma + \alpha = \angle BCA + \angle BCN = \angle PCN$; $AP : PC = (x \cos \alpha) / (y \cos \gamma)$; $AM : NC = (x / (2 \cos \gamma)) : (y / (2 \cos \alpha)) = (x \cos \alpha) / (y \cos \gamma)$. Из подобия треугольников следует, что $\angle APM = \angle NPC$.

8) $\angle BPM = 90° – \angle APM = 90° – \angle NPC = \angle BPN$, а это и означает, что PB биссектриса угла MPN. Ч.т.д.

4. **Решение**. Пусть в прямоугольной таблице n строк и m столбцов; x_i – сумма всех чисел в i-ой строке ($1 \leq i \leq n$), а y_j – сумма всех чисел в j-ом столбце ($1 \leq j \leq m$). Тогда по условию на пересечении i-ой строки и j-ого столбца находится число $x_i y_j$. Рассмотрим i-ую строку. По показанному ранее в клетках этой строки расположены числа $x_i y_1$, $x_i y_2$, ..., $x_i y_m$.

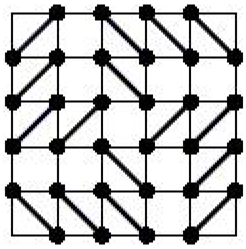
Сумма этих чисел с одной стороны равна $x_iy1 + x_iy2 + ... + x_iy_m = x_i(y_1 + y_2 + ... + y_m)$, а с другой стороны она равна x_i, согласно принятым обозначениям. Таким образом, получаем равенство

$$x_i(y_1 + y_2 + ... + y_m) = x_i.$$

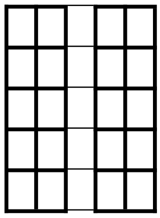
Оно будет верным либо когда $x_i = 0$, либо когда $y_1 + y_2 + ... + y_m = 1$. Последнее соотношение обозначает, что сумма всех чисел в таблице равна 1. Проводя аналогичные рассуждения для всех строк и столбцов таблицы мы получим, что либо все $x_i = 0$ и все $y_j = 0$, либо сумма всех чисел в таблице равна 1. Если все $x_i = 0$ и все $y_j = 0$, то все числа в таблице, равные x_iy_j, равны 0.

5. Ответ: 16.

Решение. Один из возможных примеров для 16 диагоналей представлен на рисунке.



Покажем от противного, что больше диагоналей в клетках провести нельзя. Пусть можно провести не меньше 17 диагоналей. Рассмотрим один из прямоугольников 5×2, показанных ниже



Поскольку на вертикальной линии, проходящей через середину прямоугольника, находится 6 вершин клеточек, то в таком прямоугольнике мы можем провести не более 6 диагоналей, удовлетворяющих условию. Тогда в двух отмеченных прямоугольниках 5×2 можно провести не более 12 диагоналей. По предположению всего проведенных диагоналей не меньше 17, значит в третьем столбце во всех клетках должны быть проведены диагонали. Заметим, что диагонали, проведённые в соседних (имеющих общую сторону) клетках, обязательно параллельны. А значит во всех клетках третьего столбца диагонали должны быть параллельны. Повторяя аналогичные рассуждения для горизонтальных прямоугольников 2×5, мы получим, что в третьей строке во всех клетках должны быть проведены диагонали, и они все должны быть параллельны. Возможные ситуации представлены на рисунке внизу. Как видно из рисунков, в каждом из случаев есть диагонали, имеющие общую вершину, чего быть не должно. Противоречие.