Функция – это одно из основных математических и общенаучных понятий, выражающее зависимость между переменными величинами.

Каждая область знаний: физика, химия, биология, социология, лингвистика и т. д. имеет свои объекты изучения, устанавливает свойства и, что особенно важно, взаимосвязи этих объектов.

В различных науках и областях человеческой деятельности возникают количественные соотношения, и математика изучает их в виде свойств чисел. Математика рассматривает абстрактные переменные величины и в отвлеченном виде, изучает различные законы их взаимосвязи, которые на математическом языке называются функциональными зависимостями, или функциями.

Например, в соотношении $y = x^2$ геометр или геодезист увидит зависимость площади y квадрата от величины x его стороны, а физик, авиаконструктор или кораблестроитель может усмотреть в нем зависимость силы y сопротивления воздуха или воды от скорости x движения. Математика же изучает зависимость $y = x^2$ и ее свойства в отвлеченном виде. Она устанавливает, например, что при зависимости $y = x^2$ увеличение x в 2 раза приводит к четырехкратному увеличению y. И где бы конкретно ни появилась эта зависимость, сделанное абстрактное математическое заключение можно применять в конкретной ситуации к любым конкретным объектам.

Определение функции.

Понятие функции уходит своими корнями в ту далёкую эпоху, когда люди впервые поняли, что окружающие их явления взаимосвязаны. Они ещё не умели считать, но уже знали, что, чем больше оленей удастся убить на охоте, тем дольше племя будет избавлено от голода, чем сильнее натянута тетива лука, тем дальше полетит стрела, чем дольше горит костёр, тем теплее будет в пещере.

С развитием скотоводства и земледелия, ремесла и обмена увеличилось количество известных людям зависимостей между величинами.

Начиная с XVII в. одним из важнейших понятий является понятие функции. Оно сыграло и поныне большую роль в познании реального мира.

Идея функциональной зависимости восходит к древности, она содержится уже в первых математически выраженных соотношениях между величинами, в первых правилах действий над числами, в первых формулах для нахождения площади и объема тех или иных фигур.

Однако явное и вполне сознательное применение понятия функции и систематическое изучение функциональной зависимости берут своё начало в XVII в. в связи с проникновением в математику идеи переменных.

Чёткого представления понятия функции в XVII в. ещё не было, однако путь к первому такому определению проложил Декарт, который систематически рассматривал в своей «Геометрии» лишь те кривые, которые можно точно представить с помощью уравнений, притом преимущественно алгебраических. Постепенно понятие функции стало отождествляться таким образом с понятием аналитического выражения – формулы.

Слово «функция» (от латинского functio – совершение, выполнение) Лейбниц употреблял с 1673 г. в смысле роли (величина, выполняющая ту или иную функцию). Как термин в нашем смысле выражение «функция от x» стало употребляться Лейбницем и И. Бернулли.

Явное определение функции было впервые дано в 1718 г. одним из учеников и сотрудников Лейбница, выдающимся швейцарским математиком Бернулли: «Функцией переменной величины называют количество, образованное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных». Оно привело в восхищение престарелого Лейбница, увидевшего, что отход от геометрических образов знаменует новую эпоху в изучении функций. Многие из этих функций нельзя было явно выразить с помощью ранее известных операций. Поэтому один из самых замечательных математиков XVII в. Леонард Эйлер (1707 – 1783), вводя в своём учебнике понятие функции, говорит лишь, что «когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых».

Леонард Эйлер во «Введении в анализ бесконечных» (1748) примыкает к определению своего учителя И. Бернулли несколько уточняя его. Определение Л. Эйлера гласит: « Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого количества и чисел или постоянных количеств». Так понимали функцию на протяжении почти всего XVII в. Даламбер, Лагранж и другие видные математики.

В формировании современного понимания функциональной зависимости приняли участие многие крупные математики. Описание функции, почти совпадающее с современным, встречается уже в учебниках математики начала XIX в. Активным сторонником такого понимания функции был Н.И. Лобачевский.

В школьном учебнике математики дается следующее определение функции:

Зависимость переменной у от переменной х называется **функцией**, если каждому значению х соответствует единственное значение у. Переменную х называют независимой переменной или *аргументом*, а переменную у – зависимой переменной. Значение у, соответствующее заданному значению х, называют значением функции.

Записывают: $y = f(x)$ (читается: «Эф от икс»). Буквой f обозначается данная функция, т. е. функциональная зависимость между переменными х и у; $f(x)$ есть значение функции, соответствующее значению аргумента х. Говорят также, что $f(x)$ есть значение функции в точке х.

Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют *область определения функции*.

Все значения, которые принимает функция $f(x)$ (при х, принадлежащих области ее определения), образуют *область значений функции.*

Может возникнуть вопрос: почему мы обозначаем функцию символом f, и когда он появился. Этот символ изобрел в 1733 г. французский математик Клеро. А появился этот символ, когда формировался общий подход к понятию функции, когда потребовалось обозначение «функции вообще».

Свойства функции в пословицах и поговорках.

Функции – это математические портреты устойчивых закономерностей, познаваемых человеком. Чтобы проиллюстрировать характерные свойства функций обратимся к пословицам и поговоркам. Ведь пословицы – это тоже отражение устойчивых закономерностей, выверенное многовековым опытом народа.

1. **Возрастание функции**.

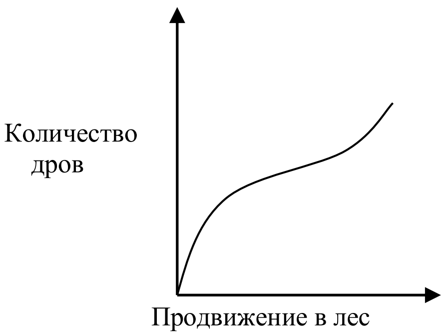
Определение: Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке X, если для любых x_1 и x_2 из X, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (короче: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$).

Иными словами, функция возрастает на промежутке X, если, какие бы два значения аргумента, принадлежащие этому промежутку, ни взять, окажется, что большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

«Чем дальше в лес, тем больше дров», - гласит пословица. Изобразим графиком, как нарастает количество дров по мере продвижения в глубь леса – от опушек, где всё давным-давно собрано, до чащоб, куда ещё не ступала нога заготовителя.

Горизонтальная ось графика – это лесная дорога. По вертикали будем откладывать (допустим, в кубометрах) количество топлива на данном километре дороги.

График представит количество дров как функцию пути.

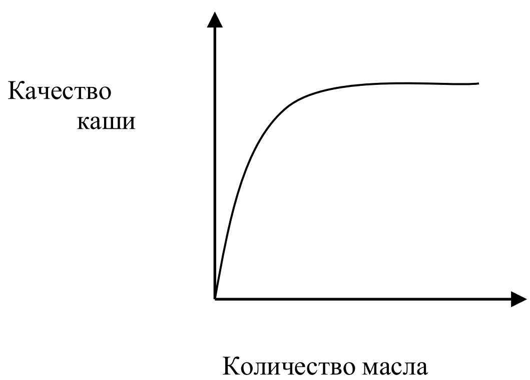


Согласно пословице эта функция неизменно возрастает. Какие две точки на оси абсцисс ни взять, для более дальней (чем дальше в лес…) значение функции будет больше (…тем больше дров). Такое свойство функции называется монотонным возрастанием.

2. **Неубывающая функция**.

Определение: Если для любых x_1 и x_2 из множества X таких, что $x_1<x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функцию f(x) называют *неубывающей* на множестве X.

«Каши маслом не испортишь». Качество каши можно рассматривать как функцию количества масла в ней. Согласно пословице эта функция не уменьшится с добавкой масла. Она, возможно, увеличится, но может оставаться и па прежнем уровне. Подобного рода функции называются монотонно неубывающими.



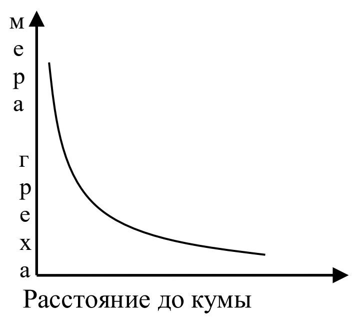
3. Убывающая функция.

Определение: Функция y= f(x) называется *убывающей* на промежутке X, если для любых x_1 и x_2 из X, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ (короче: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$).

Иными словами, функция убывает на промежутке X, если, какие бы два значения аргумента, принадлежащие этому промежутку, ни взять, окажется, что большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

«Дальше кумы – меньше греха».

Функция, которая показывает, как изменяется мера греха по мере удаления от кумы, монотонно убывающая.



4.Ограниченные функции.

Определение: Функция f, определённая на множестве X, называется *ограниченной* на множестве $X_1 \subseteq X$, если $f(x_1)$, т.е. множество её значений на множестве X_1, ограничено, т.е. если существуют постоянные m и M такие, что для всех значений x из X_1 выполняется неравенство

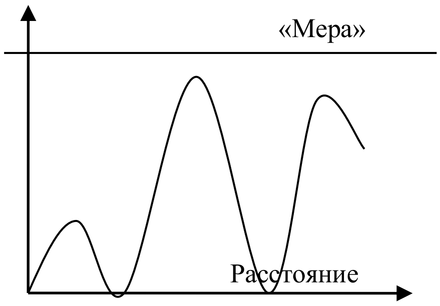
$$m \le f(x) \le M.$$

В противном случае функция называется неограниченной.

Функция y=f(x) называется *ограниченной сверху (снизу)* на промежутке X, если существует такое число k, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство f(x)≤k (f(x)≥k).

Функция *ограничена снизу*, если весь ее график расположен выше некоторой горизонтальной прямой y=m;
Функция *ограничена сверху*, если весь ее график расположен ниже некоторой горизонтальной прямой y=M.

«Выше меры конь не скачет». Если изобразить траекторию скачущего коня, то высота скачков в полном соответствии с пословицей будет ограничена сверху некоторой «мерой».



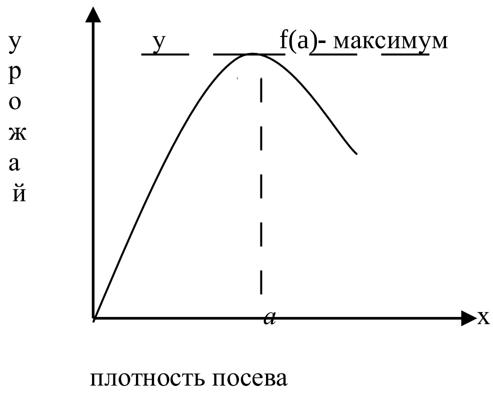
5. **Максимум функции.**

<u>Определение</u>: Пусть функция y =f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0.

Функция y =f (x) имеет *максимум* в точке x_0, если существует такая б – окрестность точки x_0, что при $x_0 - б < x < x_0 + б$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$, т.е. значение функции в этой точке больше, чем её значение во всех других точках, достаточно близких к x_0.

« Пересев хуже недосева», «- издавна говорили земледельцы. Вековой опыт свидетельствовал: урожай лишь до некоторой поры растет вместе с плотностью посева, дальше он снижается, потому что при чрезмерной густоте ростки начинают глушить друг друга.

Эта закономерность станет особенно наглядной, если изобразить её графиком, где урожай представлен как функция плотности посева. Урожай максимален, когда поле засеяно в меру. Максимум – это наибольшее значение функции по сравнению с её значениями во всех соседних точках. Это как бы вершина горы, с которой все дороги ведут только вниз, куда ни шагни.



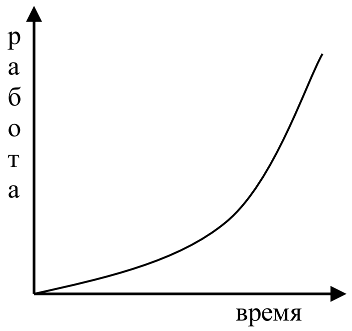
«Недосол на столе – пересол на спине». Качество пищи зависит, является функцией от количества соли в ней. Мало соли – невкусно, много – тоже в рот не возьмёшь. А где-то в промежутке, в золотой середине, когда соли в самый раз, кушанье становится особенно лакомым. В этой точке кулинарная функция достигает *максимума*. Малейший щепотью соли больше или меньше – и дегустатор с утончённым вкусом скажет, что качество пищи снизилось.

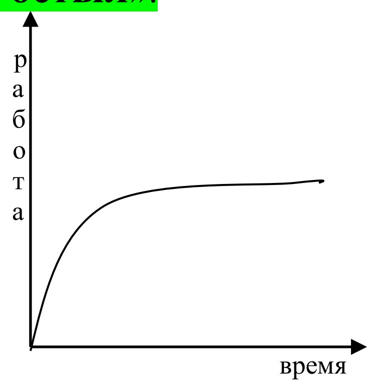
6. Вогнутость и выпуклость функции.

«Не круто начинай, круто кончай». Эта пословица заслуживает того, чтобы быть включённой в правила научной организации труда. Тем более что за ней так и видится графическое выражение.

Повелительное звучание пословицы явно рассчитано на борьбу с противоположной, весьма распространенной манерой работы. На нее тоже есть своя пословица:

«Горяч на почине, да скоро остыл».





Обе функции, представленные на графиках зависящими от времени, возрастающие. Но, как свидетельствуют кривые, расти можно по-разному.

Рост одной функции усиливается с ростом аргумента. Такое свойство функции называется *вогнутостью*. Парабола вершиной вниз представляет собой вогнутую функцию: сначала она спадает всё замедляющимися темпами, потом нарастает всё ускоряющимися. Вогнутой функцией является и гипербола, построенная для положительных значений аргумента.

Наклон другой кривой неизменно уменьшается. Рост функции слабеет с ростом аргумента. Такое свойство функции называется *выпуклостью*. Выпуклую параболу выписывает и снаряд, выпущенный из пушки под углом к горизонту. Но присмотритесь подольше к его полёту: достигнув максимальной высоты, он начинает падать; однако искривление его траектории сохраняет прежний характер. Всё усиливающийся спад –

это выпуклость. Выпуклой функцией является и гипербола, построенная для отрицательных значений аргумента.

7. Периодичность функции.

Определение: Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из области определения функции справедливо равенство $f(x + T) = f(x) = f(x - T)$. Число T называется периодом функции $y = f(x)$.

«Это сказка про белого бычка». Так говорят, когда какое-то дело безнадёжно затягивается, когда раз за разом попытки уладить его приводят к пустому или бессмысленному результату.

Поговорку знают все, но не каждый знает, как рассказывается сказка. Важная деталь рассказа – реакция слушателя. Сказка представляет собой диалог:

- Рассказать тебе сказку про белого бычка?
- Расскажи.
- Ты расскажи, я расскажи. Рассказать тебе сказку про белого бычка?
- Так давай же!
- Ты так давай же, я так давай же. Рассказать тебе сказку про белого бычка?
- Ну хватит!
- Ты ну хватит… и так далее.

Ссылку на сказку про белого бычка часто заменяют цитированием первых слов песни «**У попа была собака**». Ради полноты приведём и её.

«У попа была собака. Он её любил. Она съела кусок мяса. Он её убил. И в землю закопал. И надпись написал: «У попа была собака. Он её любил…» и так далее.

Белый бычок и поповская собака нужны нам для разговора о периодических функциях, для уяснения математического понятия периода и тех искажений, которые привносятся в него обыденной речью.

Периодичностью в обыденной речи называют чуть ли не всякую повторяемость. Но повторяемость может быть более или менее строгой. Достаточно сравнить между собой приведенные тексты: во втором, какую букву ни возьми, она обязательно повториться через 89 букв. Про первый текст такого не скажешь.

В обыденной речи утвердилось выражение «период солнечной активности». Если бы все явления на Солнце подчинялись строгой периодичности, их можно было бы предсказывать на сколь угодный долгий срок. Стала бы не нужна всемирная служба Солнца с её круглосуточными наблюдениями за дневным светилом, потеряли бы свой хлеб астрономы, пытающиеся определить, как в ближайшее время изменится количество солнечных пятен, интенсивность солнечных вспышек и т.п.

Прекрасные примеры периодических функций даёт тригонометрия: синус, косинус, тангенс… Для синуса и косинуса период составляет 360^0, для тангенса – 180^0.