Второй этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика».
2020/2021 учебный год.

9 класс

1. Вася коллекционирует марки. В 2019 году его коллекция увеличилась на n марок, а в 2020 – на 300 марок. При этом в 2019 году коллекция увеличилась на 300 %, а в 2020 – на n %. Сколько марок было у Васи в начале 2019 года?

2. Решить в целых числах уравнение $x^2 + 6x = 193 + y^2 - 4y$.

3. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E так, что $CE = CD$. Пусть K и M – середины отрезков AE и BC соответственно. Доказать, что прямая DE перпендикулярна прямой KM.

4. На длинной скамейке сидели мальчик и девочка. К ним по одному подошли еще 16 детей, и каждый из них садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовём девочку смелой, если она садилась между двумя соседними мальчиками, а мальчика – смелым, если он садился между двумя соседними девочками. Когда все сели, оказалось, что мальчики и девочки сидят на скамейке, чередуясь. Сколько из них были смелыми?

5. На доске были написаны в порядке возрастания два натуральных числа x и y ($x < y$). Петя записал на листочке x^2 (квадрат первого числа), а затем заменил числа на доске числами x и $y - x$, записав их в порядке возрастания. С новыми числами на доске он снова проделал ту же операцию, и так далее, до тех пор, пока одно из чисел на доске не стало нулем. Оказалось, что к этому моменту сумма чисел на Петином листочке стала равна 2020. Сколько существует различных начальных x и y, для которых такое могло произойти?

Второй этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика».
2020/2021 учебный год.

9 класс

1. **Ответ**: 50 марок.

Пусть в начале 2019 году у Васи было x марок, тогда в конце 2019 года у него стало $x+n$ марок. С другой стороны за 2019 год его коллекция увеличилась на 300%, следовательно в конце этого года у него стало $x + 3x = 4x$ марок. Таким образом, $x + n = 4x$, откуда $n = 3x$. Далее рассмотрим 2020 год. С одной стороны количество марок стало $4x + 300$. С другой стороны, коллекция увеличилась на n %, т.е. в ней стало $4x + n/100 * 4x$ марок. Приравнивая эти значения, получим следующее уравнение: $300 = n/100 * 4x$, или после преобразований $30000 = 12x^2$, откуда $x = 50$.

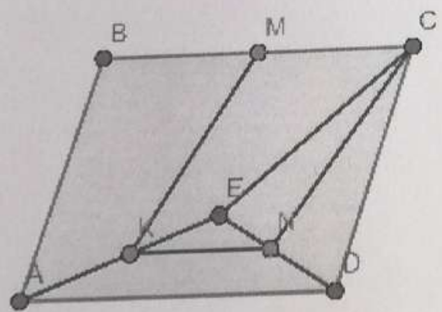
2. **Ответ**: решений нет.

Выделим слева и права полные квадраты, для этого слева прибавим и отнимем 9, а справа – 4. Получим $(x+3)^2 - 9 = 193 + (y-2)^2 - 4$. После преобразования имеем: $(x+3)^2 - (y-2)^2 = 198$, что равносильно $(x - y + 5)(x + y + 1) = 198$. Заметим, что выражения $(x - y + 5)$ и $(x + y + 1)$ всегда одной четности, т.к. отличаются на четное число $2y - 4$. Если они одновременно нечетные, то справа должно стоять нечетное число, а у нас четное, значит, такого варианта быть не может. Если они одновременно четные, то справа должно стоять число, делящееся на 4, но 198 на 4 не делится, значит, такого варианта тоже быть не может. Следовательно, ни один из вариантов не подходит, а это означает, что целочисленных решений нет.

Замечания: Для доказательства, что решений нет, можно воспользоваться тем фактом, что при делении на 4 квадрат целого числа может давать только остатки 0 и 1.

Можно перебрать все пары целочисленные делителей числа 198, приравнивать их $(x - y + 5)$ и $(x + y + 1)$ соответственно и убедиться, что решений нет. В этом случае необходимо провести полный перебор.

3.



Пусть N – середина отрезка ED.

В треугольнике AED KN – средняя линия, значит $KN = 1/2\ AD = 1/2\ BC$ и $KN \parallel AD \parallel BC$.

Четырехугольник $KMCN$ – параллелограмм, т.к. $MC = 1/2\ BC = KN$ и $MC \parallel KN$. Следовательно, $KM \parallel NC$.

Треугольник ECD равнобедренный ($CE = CD$ по условию). CN – медиана, а значит и высота. Т.е. CN перпендикулярна ED, и, следовательно, KM перпендикулярна ED.

Что и требовалось доказать.

4. **Ответ**: 8.

Группой детей назовем рядом сидящих детей одного пола, ограниченных по краям детьми другого пола. Изначально было две группы. Когда садился несмелый ребенок, то он подсаживался к какой-то уже существующей группе, и количество групп не менялось. Когда садился смелый ребенок, он разбивал группу другого пола на две и составлял новую группу из самого себя, увеличивая общее количество групп на 2. В конце оказалось 18 групп. Значит, смелых детей было $(18 - 2) : 2 = 8$.

9 кл.

Второй этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика». 2020/2021 учебный год.

5. **Ответ**: 6.

Вначале надо заметить следующее свойство: на каждом шаге Петя уменьшает произведение чисел на доске на число, которое он пишет на бумажке: $x(y-x) = xy - x^2$. Поскольку в конце произведение на доске стало равно 0, то сумма на бумажке стала равна исходному произведению xy.

Осталось посчитать сколькими способами число 2020 можно представить в виде произведения двух чисел: $xy = 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, $x < y$. Посчитаем количество способов выбрать x, т.к. при выборе x множитель y определяется однозначно. x – делитель числа 2020. Всего у числа 2020 по известной формуле имеется $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ делителей (у числа $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ ровно $(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_k + 1)$ делителей). Поскольку, нам нужны только пары (x, y) такие, что $x < y$, то общее количество делителей 12 мы должны разделить на 2. Сами возможные пары: (1, 2020), (2, 1010), (4, 505), (5, 404), (10, 202), (20, 101).