Второй этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика».
2020/2021 учебный год.

8 класс

1. **Ответ**: 16 человек.

Пусть в классе было $x$ любителей математики, а пришло ещё $y$ (по условию $y$ может принять значение от 0 до 7). Тогда изначальный процент любителей математики был равен $(x/25) * 100\%$, а после прихода новых учеников он стал равен $((x+y)/32) * 100\%$. По условию процент любителей математики увеличился на 10%, откуда получаем следующее уравнение: $((x+y)/32) * 100 - (x/25) * 100 = 10$. Преобразуя это уравнение, получим:

$$25y - 7x = 80. \quad (*)$$

Следовательно, $7x = 5(5y - 16)$. Отсюда видно, что $5y - 16$ делится на 7. Перебирая возможные значения $y$ от 0 до 7, получаем, что только при $y = 6$, данное выражение делится на 7. Значит $y = 6$. Подставив это значение в уравнение (*) получим: $150 - 7x = 80$, откуда $x = 10$.

Таким образом, в классе стало $x+y = 10 + 6 = 16$ любителей математики.

Замечание: можно было не делать вывод о том, что $5y - 16$ делится на 7, а сразу начать перебирать возможные варианты $y$ в уравнении (*).

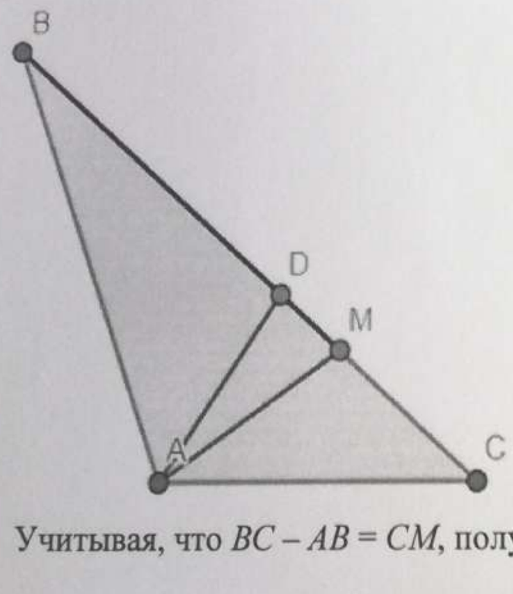
2. **Ответ**: нет решений.

После переноса $y^2$ в левую часть получим $x^2 - y^2 = 18$, что равносильно $(x - y)(x + y) = 18$. Заметим, что выражения $(x - y)$ и $(x + y)$ всегда одной четности, т.к. отличаются на четное число $2y$. Если они одновременно нечетные, то справа должно стоять нечетное число, а у нас четное, значит, такого варианта быть не может. Если они одновременно четные, то справа должно стоять число, делящееся на 4, но 18 на 4 не делится, значит, такого варианта тоже быть не может. Следовательно, ни один из вариантов не подходит, а это означает, что целочисленных решений нет.

*Замечания*: Для доказательства, что решений нет, можно воспользоваться тем фактом, что при делении на 4 квадрат целого числа может давать только остатки 0 и 1.

Можно перебрать все пары целочисленные делителей числа 18, приравнивать их $(x - y)$ и $(x + y)$ соответственно и убедиться, что решений нет. В этом случае необходимо провести полный перебор.

3. **Ответ**: 3.




На стороне $BC$ отложим отрезок $BM$, равный $AB$. В равнобедренном треугольнике $ABM$ углы при основании $AM$ равны по 80° ($\angle MAB = \angle AMB = 80°$), поэтому

$\angle CAM = \angle CAB - \angle MAB = (180° - 20° - 40°) - 80° = 40° = \angle ACM$. Следовательно, треугольник $AMC$ равнобедренный и $AM = MC$.

Т.к. $AD$ биссектриса, то $\angle DAC = 60°$.

Рассмотрим треугольник $ADC$. $\angle ADC = 180° - \angle DAC - \angle ACD = 180° - 60° - 40° = 80°$.

Т.к. $\angle ADC = 80° = \angle AMD$, то треугольник $ADM$ тоже равнобедренный и $AD = AM$. А значит, $AD = CM$.

Учитывая, что $BC - AB = CM$, получаем, что $CM = AD = 3$.

4. **Ответ**: Нет, не может.

Рассмотрим четность числа черных клеток на доске. При перекрашивании горизонтали или вертикали, содержащей $k$ чёрных и $8 - k$ белых клеток, получится $8 - k$

8 кл

Второй этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика».


чёрных и $k$ белых клеток. Поэтому число чёрных клеток изменится на $(8 - k) - k = 8 - 2k$, то есть на чётное число. Так как чётность числа чёрных клеток сохраняется, из исходных 32 чёрных клеток мы не сможем получить одну чёрную клетку.

5. **Ответ**: первый игрок.

Первым ходом первый игрок забирает 1 спичку, после чего на столе остается 2019 спичек (заметим, что 2019 делится на 3). Дальнейшая тактика первого игрока такова, сколько бы не брал второй игрок спичек, первый берет 1 или 2 спички, чтобы на столе становилось количество спичек кратное 3. Покажем, что с помощью такой тактики он всегда сможет выиграть. Если перед ходом второго игрока на столе лежит число спичек, кратное 3, то он никак не сможет забрать все спички со стола, поскольку ни одна степень двойки не делится на 3. Поэтому после того, как второй игрок заберет некоторое количество спичек со стола, не кратное трем, оставшееся количество спичек уже не будет делиться на 3, следовательно, будет давать остаток 1 или 2 при делении на 3. Значит, первый игрок может забрать количество спичек, равное остатку от деления на 3 текущего количества спичек, в результате получится число спичек, делящееся на 3 (возможно и число 0). Понятно, что игра конечна, т.к. количество спичек на столе при каждом ходе обязательно уменьшается.

*Замечание*: для решения данной задачи можно использовать технику выигрышных и проигрышных позиций. Однако, решая таким методом, учащийся должен строго обосновать, почему 2020 – это выигрышная позиция.