

Второй этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика»  
2019/2020 учебный год

8 класс

1. Все 50 восьмиклассников некоторой школы занимаются либо футболом, либо волейболом, либо баскетболом, либо несколькими перечисленными видами спорта. В понедельник все футболисты поехали на районные соревнования, и оказалось, что в школе осталось всего 10 восьмиклассников, играющих в баскетбол. Во вторник на соревнования поехали все баскетболисты, а в школе осталось только 12 восьмиклассников, играющих в волейбол. И, наконец, в среду на соревнования поехали все волейболисты, а в школе осталось 22 восьмиклассника, играющих в футбол. Сколько восьмиклассников занимается всеми тремя видами спорта?

2. В остроугольном треугольнике  $ABC$   $AB = BC$ , из точки  $D$  на стороне  $AB$  опущен перпендикуляр  $DH$  на сторону  $BC$ . Найдите угол  $HAC$ , если известно, что  $AD = DH$ .

3. Могут ли быть одновременно выполнены два условия: произведение  $n$  целых чисел равно  $n$ , сумма этих же чисел равна 0. а) при  $n = 2019$ ? б) при  $n = 2018$ ? Ответ обоснуйте.

4. Все натуральные числа от 1 до 2019 включительно разбиты на две группы: чётные и нечётные. В какой из групп сумма всех цифр, используемых для записи чисел, больше и на сколько?

5. В наборе несколько гирь, все массы которых различны. Известно, что если положить любую пару гирь на левую чашу, можно весы уравновесить, положив на правую чашу одну или несколько гирь из остальных. Найдите наименьшее возможное число гирь в наборе.

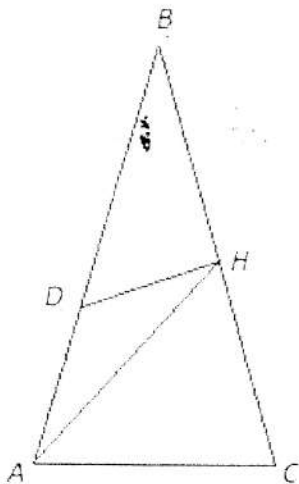
Решения.  
8 класс

1. Ответ: 6 восьмиклассников.

Решение. Заметим, что по условию каждый учащийся занимается хотя бы одним видом спорта. После того, как уехали все футболисты, в баскетбол могли играть только те, кто занимается только баскетболом, либо те, кто занимается либо баскетболом, либо волейболом (всего 10 человек). Аналогично, во втором случае 12 восьмиклассников – это либо те, кто занимается только волейболом, либо те, кто занимается либо волейболом, либо футболом. Наконец, в третьем случае, 22 восьмиклассника – это либо те, кто занимается только футболом, или те, кто занимается либо футболом, либо баскетболом. Заметим, что суммарно в этих трех случаях мы посчитали ровно по одному разу, каждого восьмиклассника занимающегося одним видом спорта либо каждого восьмиклассника, занимающегося двумя видами спорта. Суммарно мы рассмотрели  $10+12+22 = 44$  школьника. Остались учащиеся, которые занимаются тремя видами спорта. Поскольку всего восьмиклассников 50, то тремя видами спорта занимаются  $50 - 44 = 6$  восьмиклассников.

Примечание. Легко и наглядно решение этой задачи можно получить, используя диаграмму Венна. Ответ 6 может быть получен случайно, просьба смотреть на степень обоснованности данного ответа.

2. Ответ:  $45^\circ$ .



Решение. Пусть  $\angle BAC = \alpha$ , тогда из того, что треугольник  $ABC$  равнобедренный следует, что  $\angle BCA = \alpha$ , откуда  $\angle ABC = 180^\circ - 2\alpha$  (сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ ). Рассмотрим треугольник  $DBH$ , по условию он прямоугольный (угол  $DH \perp BC$  прямой), откуда находим угол  $BDH$ , он равен  $180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) - 90^\circ = 2\alpha - 90^\circ$ . Угол  $ADH$  является смежным с углом  $BDH$ , откуда  $\angle ADH = 180^\circ - (2\alpha - 90^\circ) = 270^\circ - 2\alpha$ . Теперь рассмотрим треугольник  $ADH$ , он равнобедренный по условию ( $AD = DH$ ), откуда  $\angle DAN = \angle DHA$ . Далее получаем  $2\angle DAN = \angle DAN + \angle DHA = 180^\circ - \angle ADH = 2\alpha - 90^\circ$ . Откуда  $\angle DAN = \alpha - 45^\circ$ . Учитывая, что весь  $\angle BAC = \alpha$ , имеем  $\angle HAC = 45^\circ$ .

3. Ответ: а) нет; б) нет.

Решение. а) Т.к. произведение целых чисел – нечетное число (а именно 2019), то все сомножители нечетные. Тогда сумма нечетного числа (2019) нечетных слагаемых должно быть нечетным числом и не может быть равна 0.

б) Так как произведение целых чисел равно 2018, то среди множителей ровно один четный. Если бы четных делителей было хотя бы 2, то результат делился бы на 4, но 2018 на 4 не делится. Таким образом, среди рассматриваемых чисел ровно одно четное и 2017 нечетных. Сумма одного четного числа и 2017 нечетных чисел нечетное и не может быть равно 0.

4. Ответ: Сумма цифр нечетных чисел больше на 1015

Решение. Разобьем все числа на пары следующим образом:  $\{2,3\}$ ,  $\{4,5\}$ ,  $\{6,7\}$ ,  $\{8,9\}$ ,  $\{10,11\}$ , ...,  $\{2018, 2019\}$ . Легко заметить, что в каждой такой паре сумма цифр нечетного числа всегда на 1 больше суммы цифр четного числа. Это происходит из-за того, что внутри каждой такой пары нет переносов разрядов. Всего таких пар 1014. Еще не учтено