

8 класс

1. На флешке несколько файлов заражены компьютерным вирусом. Если Вовочка вылечит один зараженный файл, то доля зараженных файлов составит 24% от числа всех файлов. Если Вовочка удалит один зараженный файл, то доля зараженных файлов составит 25%. Сколько зараженных файлов на флешке изначально?

2. Найти наименьшее натуральное число, которое делится на какие-либо 15 подряд идущих чисел.

3. Угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC равен 108° . Прямая, перпендикулярная биссектрисе AD этого треугольника и проходящая через точку D , пересекает стороны AC и AB в точках E и F соответственно. Докажите, что $BD = EC$.

4. По кругу расставлено несколько чисел. Эти числа раскрасили в два цвета: красный и синий. Оказалось, что каждое красное число равно сумме соседних чисел, а каждое синее число – полусумме соседних чисел. Докажите, что сумма всех красных чисел равна нулю.

5. Можно ли замостить доску 2021×2021 доминошками 1×2 , которые разрешается располагать только горизонтально, и прямоугольниками 1×3 , которые разрешается располагать только вертикально? (Две стороны доски условно считаются горизонтальными, а две другие – вертикальными.)

9 класс

1. У Алёны есть мобильный телефон, заряда аккумулятора которого хватает на 6 часов разговора или 66 часов ожидания. Когда Алёна садилась в поезд, телефон был полностью заряжен, а когда она выходила из поезда, телефон разрядился. Сколько времени она ехала на поезде, если известно, что Алёна говорила по телефону ровно половину времени поездки? (В поезде телефон не заряжался).

2. Боря и Лёня делят одно и то же натуральное число с остатком. Боря делит его на 20, а Лёня – на 21. Частное, которое получил Боря, и остаток, который получил Лёня, в сумме дают 22. Какой остаток получился у Бори? Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.

3. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D , для которой $2AD = DC$. E – основание перпендикуляра, опущенного из точки D на отрезок BC , F – точка пересечения отрезков BD и AE . Найдите угол ADB , если известно, что треугольник BEF – равносторонний.

4. Числа 1, 2, 3, ..., 36 записали последовательно слева направо сверху вниз в квадратную таблицу 6×6 . Произвольное число из таблицы выписывается, после чего из таблицы вычёркивается строка и столбец, содержащие это число. То же самое проделывается с оставшейся таблицей и т.д., всего 6 раз. Найти сумму выписанных чисел.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

5. При каких натуральных $n > 1$, существуют n последовательных натуральных чисел, которые можно расставить на окружности так, чтобы произведение любых соседних на окружности чисел было полным квадратом?

10 класс

1. На дне озера бьют ключи, увеличивающие количество воды. Стадо из 1011 слонов выпьют озеро ровно за 1 сутки. А стадо из 22 слонов выпьют озеро за 47 суток. За сколько суток выпьет озеро 1 слон?

2. Пусть $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2021$. Определите четность первой справа ненулевой цифры в десятичной записи числа n .

3. Прямая, параллельная медиане CM треугольника ABC , пересекается с прямыми AB , BC и AC в точках C' , A' и B' соответственно.

Докажите, что треугольники $AA'C'$ и $BB'C'$ равновелики.

4. Числа $1, 2, 3, \dots, n^2$ записали последовательно слева направо сверху вниз в квадратную таблицу $n \times n$.

Произвольное число из таблицы выписывается, после чего из таблицы вычёркивается строка и столбец, содержащие это число. То же самое проделывается с оставшейся таблицей и т.д., всего n раз. Найти сумму выписанных чисел.

1	2	3	...	n
$n+1$	$n+2$	$n+3$...	$2n$
...
...	n^2

5. На окружности взяли 10 точек. Какое наибольшее число отрезков с концами в этих точках можно провести, чтобы никакие три не образовывали треугольника с вершинами в отмеченных точках?

11 класс

1. Пятеро друзей скинулись на покупку. Могло ли оказаться так, что каждые два из них внесли менее одной трети общей стоимости?

2. Докажите, что для любого натурального n сумма всех делителей числа n^2 нечетна.

3. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках A и C , пересекают касательную, проведенную в точке B , соответственно в точках M и N . В треугольнике ABC проведена высота BP . Докажите, что BP – биссектриса угла MPN .

4. В прямоугольной таблице произведение суммы чисел любого столбца на сумму чисел любой строки равно числу, стоящему на их пересечении.

Доказать, что сумма всех чисел в таблице равна единице, или все числа равны нулю.

5. Квадрат разбит прямыми на 25 квадратиков-клеток. В некоторых клетках нарисована одна из диагоналей так, что никакие две диагонали не имеют общей точки (даже общего конца). Каково наибольшее возможное число нарисованных диагоналей?