Второй этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика».
2020/2021 учебный год.

11 класс

1. В первый день Маша собрала в $\frac{17}{7}$ орехов больше, чем Вася, а во второй – на 88 % меньше, чем Вася. За два дня Маша собрала орехов на 50 % больше, чем Вася. Какое наименьшее количество орехов они могли собрать вместе?

2. Решить в целых числах уравнение $x^2 + 759 = 2^y$.

3. В треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности, точки I_A, I_C – центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC и AB соответственно. Точка O – центр описанной окружности треугольника II_AI_C. Докажите, что $OI \perp AC$.

4. Пусть a, b и c – длины сторон некоторого треугольника. Докажите неравенство: $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$.

5. В клетках квадратной таблицы $n \times n$ $(n > 1)$ записаны действительные числа. Разрешается вместо любых двух чисел записать в обе клетки их среднее арифметическое. Найдите все натуральные n, при которых для любой начальной расстановки чисел в таблице такими операциями можно добиться того, чтобы во всех клетках были записаны одинаковые числа.

Второй этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика».
2020/2021 учебный год.

11 класс

1. **Ответ**: 2020 орехов.

Пусть Вася в первый день собрал a орехов, а во второй день – b орехов. Тогда Маша в первый день собрала $^{17}/_{7}\,a$, а во второй день – $0{,}12b$. Поскольку в каждый из дней Маша собрала целое число орехов, то a должен делиться на 7, а b – на 25 ($0{,}12 = 3/25$). Пусть $a = 7x$, $b = 25y$, где x, y – натуральные числа. Тогда за два дня Маша собрала $17x + 3y$ орехов, а Вася – $7x + 25y$. Т.к. суммарно Маша собрала на 50% больше, чем Вася, то $17x + 3y = 1{,}5(7x + 25y)$. Преобразовав последнее уравнение, получим: $13x = 69y$. Теперь ясно, что x кратно 69, а y кратно 13 (т.к. 13 и 69 взаимно просты), значит, наименьшие натуральные числа, удовлетворяющие этому равенству: $x = 69$, $y = 13$.

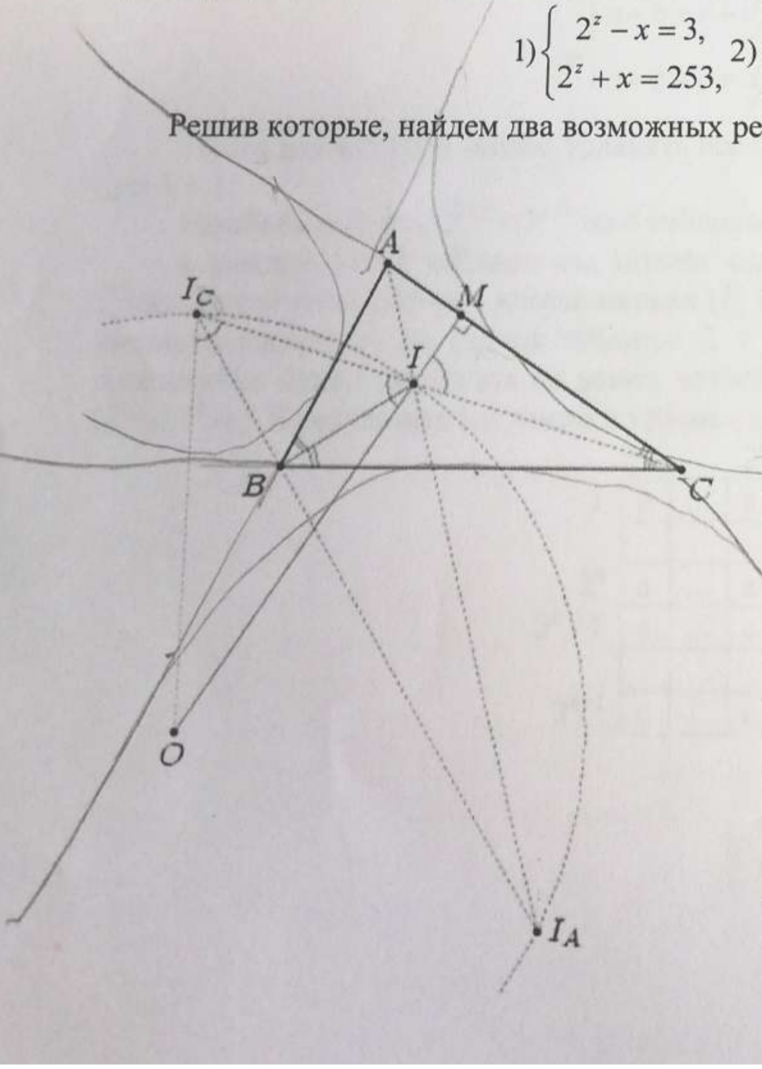
Общее число собранных орехов: $17x + 3y + 7x + 25y = 24x + 28y = 24\cdot 69 + 28\cdot 13 = 2020$.

2. **Ответ**: (125, 14), (-125, 14).

Рассмотрим остатки при делении на 3 левой и правой части. Число 759 на 3 делится, т.е. дает остаток 0; x^2 дает остатки 0 или 1; 2^y при четном y дает остаток 1, при нечетном – 2. Единственная возможная ситуация, при которой достигается равенство, это и слева и справа у нас остаток 1 при делении на 3. Следовательно, y делится на 2. Пусть $y = 2z$, тогда $2^{2z} = x^2 + 759$, откуда $2^{2z} - x^2 = 759$, что равносильно $(2^z - x)(2^z + x) = 759 = 3\cdot 11\cdot 23$. Заметим, что $2^z - x + 2^z + x = 2^{z+1}$. Следовательно, необходимо представить 759 в виде произведения двух положительных множителей, сумма которых равна степени 2. Возможные варианты: $765 = 1\cdot 759 = 3\cdot 253 = 11\cdot 69 = 23\cdot 33$. Рассмотрим каждый вариант по-отдельности: $1 + 759 = 760$ – не степень 2; $3 + 253 = 256$ – степень 2 (вариант подходит), $11 + 69 = 80$ – не степень 2; $23 + 33 = 56$ – не степень 2. Итак, подходит только одна пара делителей 3 и 253. Следовательно, получаем возможные 2 системы:

$$1)\begin{cases} 2^z - x = 3, \\ 2^z + x = 253, \end{cases} \quad 2)\begin{cases} 2^z - x = 253, \\ 2^z + x = 3. \end{cases}$$

Решив которые, найдем два возможных решения.



3. Центры вневписанных окружностей I_A, I_C лежат на биссектрисе внешнего угла при вершине B. I лежит на биссектрисе угла B, следовательно $\angle IBI_C = \angle IBI_A = 90°$.

Пусть $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$. Нетрудно проверить, что $\angle ABI_A = 90° + \beta$, $\angle BI_AA = 90° - \alpha - \beta$ (т.к. сумма углов треугольника AI_AB равна 180°). Поэтому $\angle I_COI = 2\angle I_CI_AI = 180° - 2\alpha - 2\beta = 2\gamma$.

Из равнобедренного треугольника I_COI ($OI_C = OI$ как радиусы) получаем, что $\angle OII_C = 90° - \gamma$.

Поскольку $\angle CIM = \angle OII_C$, как вертикальные, то в треугольнике IMC (M – точка пересечения прямых OI и AC) $\angle ICM + \angle CIM = \gamma + 90° - \gamma = 90°$, следовательно, $\angle IMC = 90°$, что и требовалось доказать.

11 кл.

Второй этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика». 2020/2021 учебный год.

4. Согласно неравенству треугольника $a + b > c$. Покажем, что выполнено неравенство $a^2 - ab + b^2 \geq 0$. Действительно $a^2 - ab + b^2 = a^2 - ab + 1/4\ b^2 + 3/4\ b^2 = (a - 1/2\ b)^2 + 3/4\ b^2 \geq 0$. Последнее неравенство очевидно.

Следовательно, $(a + b)\ (a^2 - ab + b^2) \geq c\ (a^2 - ab + b^2)$.

Преобразуем выражение слева из условия:

$a^3 + b^3 + 3abc = (a + b)\ (a^2 - ab + b^2) + 3abc \geq c\ (a^2 - ab + b^2) + 3abc = c\ (a^2 + 2ab + b^2) = c\ (a + b)^2 > c^3$.

5. **Ответ**: $n = 2^k,\ k \in \mathrm{N}$.

Сначала покажем, что при $n = 2^k q$, где q – нечетное число большее 1, не всегда можно добиться того, чтобы все числа стали одинаковыми. Заметим, что при применении указанной в условии задачи операции сумма всех чисел в таблице не меняется. Рассмотрим следующую начальную расстановку: в одной клетке находится число 1, во всех остальных – 0. Сумма всех чисел в таблице равна 1, следовательно, если мы сможем сделать во всех клетках числа одинаковыми, то они должны быть равны: $1/n^2$. Заметим, что применяя заданную операцию в данном случае, мы всегда будем получать только числа вида $1/2^t$. Таким образом, мы никогда не сможем получить в знаменателе нечетный делитель. А значит, не сможем получить в знаменателе число n^2, т.к. оно имеет нечетный делитель q.

Докажем, что при $n = 2^k$ мы всегда сможем сделать все числа одинаковыми. Доказательство проведем методом математической индукции по k.

База $k = 1$. Используем следующий алгоритм:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} {a+b}/2 & {a+b}/2 \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} {a+b}/2 & {a+b}/2 \\ {c+d}/2 & {c+d}/2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} {a+b+c+d}/4 & {a+b}/2 \\ {a+b+c+d}/4 & {c+d}/2 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} {a+b+c+d}/4 & {a+b+c+d}/4 \\ {a+b+c+d}/4 & {a+b+c+d}/4 \end{bmatrix}.$$

Пусть для $k \geq 1$ мы можем уравнять все числа, докажем, что мы можем это сделать и для $k + 1$:

Разобьем таблицу $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ на 4 таблицы $2^k \times 2^k$. По предположению индукции, в каждой такой таблице мы можем сделать числа равными (см. таблицу внизу). Далее рассмотрим клетки с координатами $(1, 1)$, $(1, 2^k+1)$, $(2^k+1, 1)$, $(2^k+1, 2^k+1)$. Действуя, согласно алгоритму из случая таблицы 2×2, мы может сделать эти числа равными. Аналогично будем поступать со всеми четверками клеток вида (y, y), $(y, 2^k+y)$, $(2^k+y, y)$, $(2^k+y, 2^k+y)$. В результате все числа в таблице станут равными.

	1		2^k	2^k+1		2^{k+1}
1	a	...	a	b	...	b
2^k	a	...	a	b	...	b
2^k+1	c	...	c	d	...	d
2^{k+1}	c	...	c	d	...	d