Второй этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика». 2019/2020 учебный год

11 класс

1. Все 56 одиннадцатиклассников некоторой школы занимаются либо футболом, либо волейболом, либо баскетболом, либо несколькими перечисленными видами спорта. Известно, что баскетболом занимаются в два раза меньше одиннадцатиклассников, чем тех, кто занимается волейболом и в три раза меньше, чем тех, кто занимается футболом. Только футболом и волейболом (ровно двумя видами спорта) занимаются 4 одиннадцатиклассника, только футболом и баскетболом – 3 одиннадцатиклассника, только баскетболом и волейболом – 5. Сколько одиннадцатиклассников занимается только одним видом спорта, если известно, что тремя видами спорта занимаются 2 одиннадцатиклассника?

2. В трапеции $ABCD$ точка E – середина боковой стороны AB. На стороне CD выбрана точка F так, что отрезок EF перпендикулярен AB. Известно, что площадь четырехугольника $EBCF$ в пять раз меньше площади четырехугольника $AEFD$, $CF = 2$, $FD = 10$, $EC = 3$. Найдите ED.

3. На доске записано целое число. Его последняя цифра запоминается, затем стирается и, умноженная на 5, прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Первоначально на доске было записано число 7^{2019}. Может ли после применения нескольких таких операций получиться число 2019^7?

4. Найдите все целые a, при которых уравнение $x^2+ax+a = 0$ имеет целые корни.

5. На доске записано 29-значное число $X = \overline{a_{29}a_{28}\ldots a_1}$, где a_1, ..., a_{29} – его цифры, $a_{29} \neq 0$. Известно, что для любого k цифра a_k встречается в этом числе $a_{(30-k)}$ раз. Например, если $a_5 = 3$, то цифра a_{25} встречается в этом числе 3 раза. Найдите сумму цифр числа X.

Второй этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика». 2019/2020 учебный год

Решения.
11 класс.

1. Ответ: 42 одиннадцатиклассника.

Решение. Пусть a одиннадцатиклассников занимаются только баскетболом, b – только волейболом, c – только футболом.

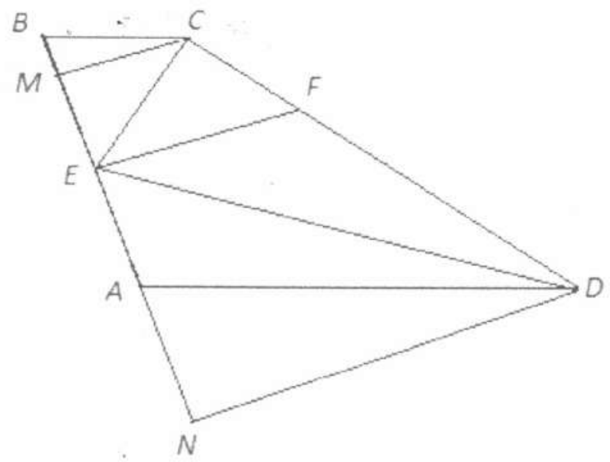
Всего футболом занимаются те, кто занимаются только футболом, только футболом и волейболом, только футболом и баскетболом и всеми тремя видами спорта. Тогда всего в футбол играют $c+3+4+2 = c+9$ одиннадцатиклассников. Аналогично в баскетбол играют $a+3+2+5 = a+10$ учащихся, а в волейбол – $b+11$. Из условия задачи нам известно, что баскетболом занимается в два раза меньше одиннадцатиклассников, чем тех, кто занимается волейболом, откуда получаем уравнение $b+11 = 2(a+10)$ (1). Аналогично, получаем уравнение $c+9 = 3(a+10)$ (2).

Теперь, общее количество одиннадцатиклассников можно посчитать как количество тех, кто занимается только одним видом спорта, плюс те, кто занимается ровно двумя видами спорта, плюс те, кто занимается ровно тремя видами спорта, откуда получаем третье уравнение (по условию каждый учащийся занимается хотя бы одним видом спорта): $a+b+c+3+4+5+2 = 56$ (3).

Получаем систему из трех уравнений с тремя неизвестными (1)–(3), решая которое, находим, что $a = 2$, $b = 13$, $c = 27$. Тогда искомый ответ: $a+b+c = 42$.

Примечание: Наглядно решение этой задачи можно получить, используя диаграмму Венна.

2. Ответ: 15.



Решение. Т.к. треугольники CEF и DEF имеют общую высоту, опущенную из вершины E, то $S_{CEF} : S_{DEF} = 2 : 10 = 1 : 5$. Поскольку $S_{EBCF} : S_{AEFD} = 1 : 5$ (по условию), то $S_{BCE} : S_{AED} = 1 : 5$. Проведем высоты CM и DN в треугольниках BCE и AED соответственно. Т.к. $BE = AE$ (по условию), $S_{BCE} = 0,5 \cdot BE \cdot CM$, $S_{AED} = 0,5 \cdot AE \cdot DN$, то $CM:DN = 1 : 5$. Т.к. $CM \| EF \| DN$, то по теореме о пропорциональных отрезках $ME : EN = CF : FD = 1 : 5$ (обобщение теоремы Фалеса), откуда получаем, что прямоугольные треугольники CME и DNE подобны ($ME : EN =1 : 5$ и $CM : DN = 1 : 5$), откуда следует, что для гипотенуз выполнено $CE : ED = 1 : 5$, откуда $ED = 15$.

3. Ответ: нет.

Решение. Покажем, что если исходное число делилось на 7, то после указанного преобразования новое число тоже будет делится на 7. Представим исходное число в виде $10a+b$, тогда после преобразования новое число будет иметь вид $a+5b$. Пусть $10a+b$ делится на 7, тогда $3a+b$ делится на 7 ($3a+b = 10a+b-7a$), тогда $6a+2b$ делится на 7 ($6a+2b = 2(3a+b)$), а т.к. $7a+7b$ обязательно делится на 7, то и разность $7a+7b-6a-2b = a+5b$ делится на 7.

Исходное число очевидно делится на 7, а 2019^7 на 7 не делится, значит, получить его указанными операциями не удастся.

4. Ответ: $a = 0$ или $a = 4$.

Решение. Пусть x и y – корни данного квадратного уравнения, тогда по теореме Виета $x + y = a$, $xy = -a$. Тогда $0 = a-a = x+y+xy = x+y+xy+1-1 = (x+1)(y+1) - 1$. Откуда получаем, что $(x+1)(y+1) = 1$. Т.к. x и y целые, то возможны 2 варианта: либо $x+1 = y+1 = 1$, либо $x+1 = y+1 = -1$. В первом случае $x = y = 0$, откуда $a = 0$. Во втором случае $x = y = -2$, откуда $a = x+y = -4$.

5. Ответ: 201.

Решение. Разобьем все цифры числа X на пары $(a_k, a_{(30-k)})$. Заметим, что если у нас есть пара (a, b), то обязательно есть и пара (b, a). Также отметим, что цифра a не сможет быть в паре ни с какой другой цифрой c кроме b. В противном случае цифра a должна будет встречаться в числе X и b и $c \neq b$ раз, что невозможно. Посчитаем, сколько всего пар вида (a, b) встречается в числе X. С одной стороны таких пар будет a, т.к. цифра b встречается a раз, а она образует пару только с цифрой a. С другой стороны таких пар будет b, т.к. цифра a встречается в числе X b раз, а она образует пару только с цифрой b. Следовательно, $a = b$. Таким образом, каждая цифра a встречается в числе ровно a раз. Далее заметим, что любая цифра, не стоящая на 15-ой позиции может встречаться в числе X только четное число раз (одинаковое число раз слева и справа от 15-ой позиции), следовательно, в числе X может быть только одна нечетная цифра, которая будет встречаться в числе X нечетное количество раз. Посчитаем, какое максимальное количество разрядов может быть в числе с описанными свойствами. Максимальная нечетная цифра – 9, которая будет встречаться в числе 9 раз, а далее остаются все четные цифры за исключением 0. Тогда максимальное количество разрядов будет $9 + 8 + 6 + 4 + 2 = 29$. В любом другом случае количество разрядов будет меньше. Значит в нашем случае в числе X 9 девяток, 8 восьмерок, 6 шестерок, 4 четверки и 2 двойки. Тогда сумма цифр числа X равно $9 \cdot 9 + 8 \cdot 8 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 201$.