Второй этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика».
2020/2021 учебный год.

10 класс

1. Через терминал оплаты на мобильный телефон можно перевести деньги, при этом взимается комиссия – натуральное число процентов. Вася положил целое количество копеек на мобильный телефон, и его счет пополнился на 1717 копеек. Сколько денег положил на счет Вася, если известно, что комиссия менее 30 %?

2. Решить в целых числах уравнение $8x^2 - 10xy - 3y^2 + 4x - 6y = 198$.

3. Через вершину C квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке K, а серединный перпендикуляр к стороне AB – в точке M (M между C и K). Найдите $\angle DCK$, если $\angle AKB = \angle AMB$.

4. Известно, что a, b и c – натуральные числа, такие, что a^3 делится на b, b^3 делится на c, c^3 делится на a. Докажите, что $(a + b + c)^{13}$ делится на abc.

5. На доске были написаны три натуральных числа. Петя записал на листочке произведение каких-нибудь двух из этих чисел, а на доске уменьшил третье число на 1. С новыми тремя числами на доске он снова проделал ту же операцию, и так далее, до тех пор, пока одно из чисел на доске не стало нулем. Оказалось, что к этому моменту сумма чисел на Петином листочке равна 2020. Сколько существует различных начальных наборов чисел, для которых такое могло произойти? (Наборы, которые могут быть получены один из другого перестановкой чисел считать одинаковыми).

Второй этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика».
2020/2021 учебный год.

10 класс

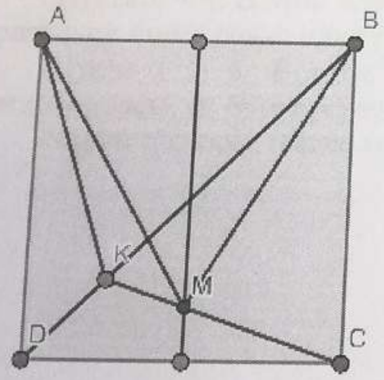
1. **Ответ**: 2020 копеек.

Пусть Вася положил x рублей, а взимаемая комиссия составляет y %. Тогда $(1 - y/100)\,x = 1717$, то есть $171700 = (100 - y)\,x$. Заметим, что $171700 = 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot 17\cdot 101$. По условию $y < 30$, откуда $70 < 100 - y < 100$, поэтому необходимо найти все числа, делящие 171700, из этого диапазона. Небольшой перебор показывает, что единственный подходящий вариант – это $5\cdot 17 = 85$, значит, $y = 15$. Таким образом, Федя положил на телефон $x = 171700 : 85 = 2020$ копеек.

2. **Ответ**: Нет решений.

Преобразуем левую часть $8x^2 - 10xy - 3y^2 + 4x - 6y = 8x^2 - 12xy + 2xy - 3y^2 + 4x - 6y = 4x(2x - 3y) + y(2x - 3y) + 2(2x - 3y) = (2x - 3y)(4x + y + 2)$. Таким образом, исходное уравнение преобразовалось к следующему: $(2x - 3y)(4x + y + 2) = 198$. Заметим, что выражения $(2x - 3y)$ и $(4x + y + 2)$ всегда одной четности, т.к. отличаются на четное число $2x + 4y + 2$. Если они одновременно нечетные, то справа должно стоять нечетное число, а у нас четное, значит такого варианта быть не может. Если они одновременно четные, то справа должно стоять число, делящееся на 4, но 198 на 4 не делится, значит такого варианта тоже быть не может. Следовательно, ни один из вариантов не подходит, а это означает, что целочисленных решений нет.

Замечание: Можно перебрать все пары целочисленные делителей числа 198, приравнивать их $(2x - 3y)$ и $(4x + y + 2)$ соответственно и убедиться, что решений нет. В этом случае необходимо провести полный перебор.



3. **Ответ**: 15°.

Треугольник ABK равен треугольнику CBK: $AB = BC$, как стороны квадрата, BK – общая сторона, $\angle ABK = \angle CBK = 45°$. Из равенства треугольников следует, что $\angle AKB = \angle CKB$ ($= \angle MKB$).

Т.к. M лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB, то $MB = MA$ и $\angle MAB = \angle MBA$.

Поскольку $\angle AKB = \angle AMB$, то вокруг четырехугольника $ABMK$ можно описать окружность. Значит, $\angle MAB = \angle MKB$ и $\angle AKB = \angle AMB$, как опирающиеся на одни и те же дуги, а т.к. $\angle AKB = \angle MKB$, то $\angle MAB = \angle AMB$. Учитывая $\angle MAB = \angle MBA$, получаем, что треугольник AMB равносторонний. Следовательно, $\angle MAB = \angle AMB = \angle MBA = 60°$, значит $\angle MKB = \angle MAB = 60°$.

$\angle DKC = 180° - \angle DCK = 120°$.

$\angle DCK = 180° - \angle DKC - \angle BDC = 180° - 120° - 45° = 15°$.

4. После раскрытия скобок все слагаемые будут иметь вид $Da^ib^jc^k$, $i + j + k = 13$, $i, j, k \geq 0$, где D – некоторая числовая константа, которая зависит от показателей степеней i, j, k, но не зависит от чисел a, b и c, и в общем случае может не иметь с ними общих делителей. Поэтому, чтобы показать, что слагаемое $Da^ib^jc^k$ делится на abc необходимо доказать, что $a^ib^jc^k$ делится на abc. Докажем это. Если $i, j, k > 0$ то $a^ib^jc^k$ делится на abc. Пусть один из показателей степени равен 0, не нарушая общности пусть $i = 0$. Если $k \geq 4$, то a^jb^k делится на $a^jb^{k-3}c$, что в свою очередь делится на abc. Если $3 \geq k \geq 1$, то $j \geq 10$ и b^jc^k делится на $b^{i-9}c^{k+3}$, что в свою очередь делится на $b^{i-9}c^ka$, что в свою очередь делится на abc. Если же и $k = 0$, то $j = 13$, тогда $b^{13} = bb^3b^9$, что делится на bcc^3, а это выражение делится на abc.

Таким образом, поскольку каждое слагаемое, получаемое после раскрытия скобок в выражении $(a+b+c)^{13}$, делится на abc, то и само выражение делится на abc.

5. **Ответ**: 10.

Вначале надо заметить следующее свойство: на каждом шаге Петя уменьшает произведение чисел на доске на число, которое он пишет на листочке: $xy(z-1) = xyz - xy$, поэтому произведение чисел на доске сложенное с суммой чисел на листочке не изменяется. Поскольку в конце произведение на доске будет равно 0, то сумма на листочке равна исходному произведению xyz.

Для ответа на вопрос задачи необходимо найти количество натуральных решений уравнения $xyz = 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, $x \le y \le z$ (за счет такого упорядочения переменных мы достигаем того, что наборы, получаемые перестановкой чисел, не будут посчитаны дважды).

Пусть $x = 1$. В этом случае получаем уравнение $yz = 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, $y \le z$. Посчитаем количество способов выбрать x, т.к. при выборе x множитель y определяется однозначно, x – делитель числа 2020. Всего у числа 2020 по известной формуле имеется $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ делителей (у числа $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ ровно $(a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_k+1)$ делителей). Поскольку, нам нужны только пары (y, z) такие, что $y < z$, то общее количество делителей 12 мы должны разделить на 2. Сами возможные пары: (1, 2020), (2, 1010), (4, 505), (5, 404), (10, 202), (20, 101).

Пусть $x = 2$. В этом случае получаем уравнение $yz = 1010 = 2 \cdot 5 \cdot 101$, $2 \le y \le z$. Всего делителей числа 1010 будет 8. С учетом упорядочивания остается 4. Однако необходимо отбросить еще один вариант, когда $y = 1$. Таким образом, остаются возможными 3 пары: (2, 505), (5, 202), (10, 101).

Пусть $x = 4$. В этом случае получаем уравнение $yz = 505 = 5 \cdot 101$, $4 \le y \le z$. Данное уравнение имеет ровно одно решение: (5, 101).

Пусть $x \ge 5$. В этом случае y не сможет принять значения большего 4, и, следовательно, не будет решений, удовлетворяющих условию задачи.

Таким образом, общее количество наборов, удовлетворяющих условию равно 10.