

10 класс

1. Все 44 десятиклассника некоторой школы занимаются либо футболом, либо волейболом, либо баскетболом, либо несколькими перечисленными видами спорта. Известно, что только баскетболом занимается в два раза меньше десятиклассников, чем тех, кто занимается только волейболом и в три раза меньше, чем тех, кто занимается только футболом. Только футболом и волейболом (ровно двумя видами спорта) занимается 5 десятиклассников, только футболом и баскетболом – 3 десятиклассника, только баскетболом и волейболом – 4. Сколько десятиклассников занимается всеми тремя видами спорта, если известно, что всего футболом занимается на 4 десятиклассника больше, чем волейболом?

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC , угол при вершине A – прямой. Обозначим через T точку пересечения диагоналей AC и BD . Из точки T опустим перпендикуляр TH на сторону AB . Доказать, что углы CHT и DHT равны.

3. Первый член последовательности равен 2019, а каждый следующий, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему члену суммы его цифр. Встретится ли в этой последовательности число 201820192020?

4. Корни уравнения $x^2+ax+b=0$, у которого $a+b=2020$, являются натуральными числами. Найдите эти корни.

5. Навигатор в Лёшиной машине показывает прогноз времени, оставшегося до прибытия в конечный пункт. Это время рассчитывается, исходя из предположения, что средняя скорость автомобиля на оставшемся участке маршрута будет такой же, как и на уже пройденной его части. Спустя пол часа после того, как Лёша поехал по маршруту в 100 км, навигатор показал, что время до прибытия 1 час. Это время оставалось неизменным на протяжении еще двух с половиной часов поездки. Какое расстояние в итоге проехал Лёша за три часа?

Решения.
10 класс

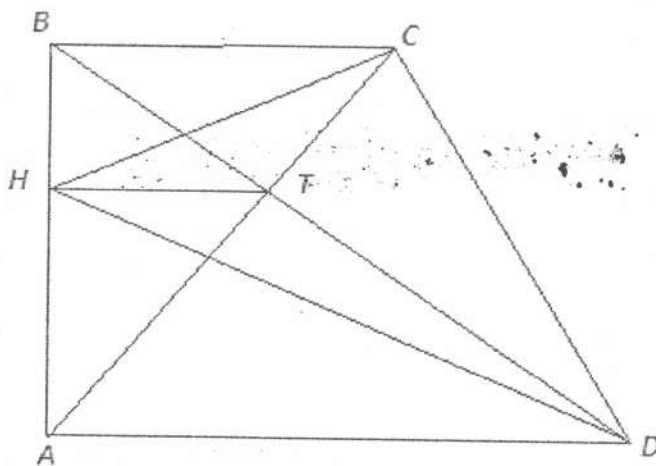
1. Ответ: 2 десятиклассника.

Решение. Пусть x десятиклассников занимается только баскетболом, тогда $2x$ – занимается только волейболом, $3x$ – только футболом. Пусть y – количество десятиклассников, занимающихся всеми тремя видами спорта.

Всего футболом занимаются те, кто занимаются только футболом, только футболом и волейболом, только футболом и баскетболом и всеми тремя видами спорта. Тогда всего в футбол играют $3x+5+3+y$ десятиклассников. Аналогично в волейбол играют $2x+5+4+y$ учащихся. Из условия, что в футбол играют на 4 человека больше, получаем уравнение: $3x+8+y = (2x+9+y)+4$, откуда $x = 5$. Теперь, общее количество десятиклассников можно посчитать как количество тех, кто занимается только одним видом спорта, плюс те, кто занимается ровно двумя видами спорта, плюс те, кто занимается ровно тремя видами спорта, откуда получаем второе уравнение (по условию каждый учащийся занимается хотя бы одним видом спорта): $x+2x+3x+3+4+5+y = 44$, что равносильно $30 + 12 + y = 44$, откуда $y = 2$.

Примечание: Наглядно решение этой задачи можно получить, используя диаграмму Венна.

2.



Решение. Т.к. $AD \parallel BC$, то угол при вершине В тоже прямой. Углы $\angle BCA = \angle CAD$ как накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AC , аналогично $\angle CBD = \angle ADB$, откуда получаем, что треугольники BTC и DTA подобные (по двум углам). Из подобия треугольников следует, что $AD : BC = AT : TC$. Т.к. $TH \parallel BC$, то треугольник AHT подобен треугольнику ABC , откуда можно сделать вывод, что $AN : NB = AT : TC = AD : BC$. Из

последнего соотношения следует, что прямоугольные треугольники HBC и HAD подобны (по равному отношению двух катетов) и, следовательно, $\angle BCH = \angle ADH$. Углы $\angle BCH = \angle DHT$, как накрест лежащие при $TH \parallel BC$ и секущей CH , аналогично $\angle ADH = \angle DHT$, откуда следует требуемое равенство.

3. Ответ: нет.

Решение. Известен факт, что число дает при делении на 9 такой же остаток, что и его сумма цифр. Таким образом, если число при делении на 9 дает остаток 3, то при прибавлении к нему его суммы цифр, результат будет давать остаток 6 ($3+3$) при делении на 9. Если же число дает остаток 6, при делении на 9, то после прибавления к нему его суммы цифр, получим остаток 3 ($6+6 = 12$ дает остаток 3) при делении на 9. Итак, первый член последовательности дает остаток 3 при делении на 9, следовательно, второй дает остаток 6, третий – 3 и т.д., остатки 3 и 6 будут чередоваться. Отсюда следует, что ни один член последовательности не делится на 9, а поскольку 201820192020 на 9 делится, то это число не может встретиться в построенной последовательности.

Второй этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика».
2019/2020 учебный год

4. Ответ: (2, 2020), (4, 674), (674, 4), (2020, 2).

Решение. Пусть x и y – корни данного квадратного уравнения, тогда по теореме Виета $x + y = b$, $xy = -a$. Тогда $2020 = a + b = x + y - xy = x + y - xy - 1 + 1 = (x - 1)(y - 1) + 1$. Откуда получаем, что $(x - 1)(y - 1) = 2019 = 3 \cdot 673$. Перебирая все возможные натуральные делители числа 2019 в качестве $(x - 1)$ и $(y - 1)$ найдет искомые корни.

5. Ответ: 75 км.

Решение. Пусть за время t часов ($t \in \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$) автомобиль проехал s км, тогда его средняя скорость равна s/t км/ч. При этом ему еще предстоит проехать $100 - s$ км. Поскольку навигатор говорит, что ехать осталось 1 час, получаем уравнение $s/t \cdot 1 = 100 - s$. Откуда, выражая s , находим: $s = \frac{100t}{1+t}$. Подставляя в это выражение значение $t = 3$, получаем $s = 75$.