**Решение заданий** **первого этапа республиканской олимпиады по математике 17.10.2018**

**8 класс**

1. *Для некоторых целых чисел x и у число 2х+3у делится на 51. Делится ли число 37x +30y на 51?*

**Решение :**

Заметим, что 37х + 30у = 51(х+ у) — 7(2х **+** 3у). Каждое слагаемое делится на 51, поэтому и сумма тоже.

1. *Среди целых чисел от 8 до 17 включительно зачеркните как можно меньше чисел так, чтобы произведение оставшихся было точным квадратом.*

*В ответе укажите сумму всех вычеркнутых чисел.*

**Решение :**

Чтобы произведение было точным квадратом,

нужно, чтобы каждый простой множитель входил в него в четной степени.

В произведение 8 • 9•...• 17 в нечетной степени входят 2, 7, 11, 13 и 17.

Значит, мы обязаны вычеркнуть сомножители 11, 13 и 17.

А вот чтобы «убить» лишние простые множители 2 и 7, хватит одного вычеркнутого сомножителя 14.

Итого сумма вычеркнутых чисел равна 11 + 13 + 14 + 17 = 55.

Ответ : 55

1. *Две биссектрисы треугольника пересекаются под углом 60°. Докажите, что один из углов этого треугольника равен 60°.*



**Решение :**

Пусть биссектрисы AA1 и CC1 треугольника ABC пересекаются в точке I (рис.).

Допустим, что AIC1 = 60°. По теореме о внешнем угле треугольника

откуда

 BAC + BCA = 120° и ABC = 180°– BAC – BCA = 60°.

Но это еще не все решение: ведь может случиться, что AIC = 60°. Однако тогда IAC + ICA = 120°, откуда BAC + BCA = 240°, что невозможно.

1. *В школе 350 учеников и 175 парт. Ровно половина девочек сидят за одной партой с мальчиками. Можно ли пересадить учеников, так, чтобы ровно половина мальчиков сидела за одной партой с девочками?*

**Решение.**

Девочек, сидящих за одной партой с девочками ровно вдвое больше, чем число парт, за которыми они сидят, то есть таких девочек четное число, а общее число девочек еще в два раза больше по условию задачи. Таким образом, общее количество девочек делится на 4. Если бы мальчиков можно было бы рассадить аналогичным образом, то общее число мальчиков делилось бы на 4 и следовательно общее число учеников делилось бы на 4, в то время как 350 на 4 не делится. Поэтому подобная рассадка учеников невозможна.

 **Ответ:** нет, нельзя.

**Решение заданий** **первого этапа республиканской олимпиады по математике 17.10.2018**

**9 класс**

1. *Докажите, что числовое выражение  делится на 2012.*

**Решение:**

Заметим, что в выражении  четное количество слагаемых. Сгруппируем слагаемые по два и преобразуем выражение.

 

Очевидно, последнее выражение делится на 2012.

1. *Для натуральных чисел x и y число* $x^{2}+xy+y^{2}$ *в десятичной записи оканчивается нулем. Докажите, что оно оканчивается хотя бы двумя нулями.*

**Решение.**

Разность $x^{3}-y^{3}=(x-y)(x^{2}+xy+y^{2})$ делится на 10. Поэтому у чисел $x^{3}$ и $y^{3}$ одинаковые последние цифры. Значит, и у чисел x и у последние цифры одинаковы (нетрудно проверить, что последние цифры чисел 03, 13, 23, …93 различны). Следовательно, одинаковые последние цифры чисел $x^{2},xy,y^{2}$ и последняя цифра числа $x^{2}+xy+y^{2}$ (равная 0) такая же, как у $3x^{2}$. Поэтому x (а вместе с ним и y) делятся на 10. Значит, $x^{2}+xy+y^{2}$ делится на 100.

1. *В трапеции длина одной из диагоналей равна сумме длин оснований, а угол между диагоналями равен 60°. Докажите, что трапеция – равнобедренная.*

**Решение.**

Пусть AD = a, BC = b, AC = a + b. Продолжим AD за точку D на расстояние DM = BC. Тогда очевидно, что треугольник АСМ - равносторонний. Но это значит, что ∆АОD и ∆ВОС - тоже равносторонние. Отсюда непосредственно следует, что ∆АОВ = ∆СОD, откуда имеем, что AB = CD.

1. *В классе 28 учеников. На уроке информатики они делятся на три группы. На уроке английского языка они тоже делятся на три группы, но по-другому. И на уроке физкультуры они делятся на три группы каким-то третьим способом. Докажите, что найдутся хотя бы два ученика, которые на всех трёх занятиях находятся друг с другом в одной группе.*

**Решение.**

**Первый способ**. Пронумеруем группы на каждом из уроков: 1, 2, 3. Для каждого ребёнка напишем последовательность из трёх чисел: номер его группы на уроках программирования, английского языка и физкультуры. Всего существует ровно 27 различных последовательностей из трёх чисел, каждое из которых равно 1, 2 или 3. Поскольку детей в классе 28, то найдутся двое, последовательности которых совпадают. Но это и означает, что на всех трёх занятиях эти школьники находятся в одной группе.

**Второй способ**. На уроке программирования 28 учеников разделены на три группы. В одной из них не менее 10 учеников (27 : 3 > 9). Во время урока английского эти ученики как-то распределены между тремя группами, значит, найдутся хотя бы четверо, попавшие в одну группу. На уроке физкультуры эти четверо не могут все находиться в разных группах, то есть найдутся хотя бы двое, в третий раз попавшие в одну группу.

**Решение заданий** **первого этапа республиканской олимпиады по математике 17.10.2018**

**10 класс**

1. Пусть a, b, c - длины сторон треугольника. Докажите, что выполняется неравенство $a^{3}+b^{3}+3abc>c^{3}$.

**Решение.**

Согласно неравенству треугольника $a+b>c$. Поэтому

$$a^{3}+b^{3}+3abc=\left(a+b\right)\left(a^{2}-ab+b^{2}\right)+3abc>c\left(a^{2}-ab+b^{2}\right)+3abc=c\left(a+b\right)^{2}>c^{3}$$

Доказано.

1. *Найдите все (хотя бы одно) трехзначные числа, которые в 12 раз больше суммы своих цифр.*

**Решение.** Ответ: 108

Имеем 100а + 10в + с =12(а + в + с) = 2в, где а, в, с - цифры. Поэтому, а=1, в=0, с= 8. Искомое число 108.

1. *Меньшее основание трапеции равно 10, а углы при большем основании равны  и . Найдите периметр трапеции, если расстояние между серединами оснований равно 5.*

**Решение. Ответ: .**

Пусть  – трапеция такая, что , , ,  –середина ,  –середина , причем . Через точку  проведем прямую параллельную стороне . Обозначим точку пересечения этой прямой со стороной , через . Заметим, что треугольник  прямоугольный (). Проведем  медиану треугольника .  – параллелограмм, так, как , 



Следовательно, .

Из прямоугольного треугольника , имеем , , , значит **.**

**Ответ: .**

1. *На турнир приехали школьники из разных городов. Один из организаторов заметил, что из них можно сделать 19 команд по 6 человек, и при этом еще менее четверти команд будут иметь по запасному игроку. Другой предложил сделать 22 команды по 5 или по 6 человек в каждой, и тогда более трети команд будут состоять из шести игроков. Сколько школьников приехало на турнир?*

**Решение.**

Согласно первому условию, количество приехавших школьников не больше 19·6 + 4 = 118.

Из второго условия следует, что это количество не меньше 22·5 + 8 = 118. Таким образом, на турнир приехало ровно 118 школьников.

**Ответ:** 118.

**Решение заданий** **первого этапа республиканской олимпиады по математике 17.10.2018**

**11 класс**

1. *Найдите число m, если известно, что уравнения* $x^{3}+mx+1=0$ *и*

$x^{4}+mx^{2}+1=0$ *имеют общий корень.*

**Решение.**

Пусть x0 – общий корень уравнений. Тогда

$$x\_{0}^{3}+mx\_{0}+1=x\_{0}^{4}+mx\_{0}^{2}+1$$

Очевидно, что $x\_{0}=0$ не является корнем любого уравнения, иначе 1=0.

Выразим $x\_{0}$:

 $x\_{0}^{3}+mx\_{0}=x\_{0}^{4}+mx\_{0}^{2}$

$$\frac{x\_{0}^{4}+mx\_{0}^{2}}{x\_{0}^{3}+mx\_{0}}=x\_{0}=1$$

Тогда $1+m∙1+1=0$, откуда $m=-2.$

**Ответ:** $m=-2.$

1. *Все трехзначные числа записаны в ряд 100, 102, 102,…, 998, 999. Сколько раз в этом ряду после двойки идет ноль?*

**Решение.**

 Если двойка стоит в разряде десятков трехзначного числа, то это числа: 120, 220, 320, ..., 920 - таких чисел 9. Если двойка стоит в разряде сотен трехзначного числа, то число начинается с 20; это числа 200, 201, 202,.. .209- таких чисел 10. Всего таких чисел 19.

1. *В треугольнике АВС угол В равен 70°, а угол С равен 50°. На сторонах АВ и АС отмечены точки М и N соответственно так, что угол МСВ равен 40°, а угол NВC равен 50°. Найдите угол NMC.*



**Решение**. Первый способ. Пусть *BN* и *СМ* пересекаются в точке *G*. На отрезке *СМ* отметим точку *Е* так, чтобы ∠*ЕВС* = 30° (см. рис. 1). Проведем биссектрису угла *BNC*, которая пересечет *ВЕ* в точке *F*.

Так как ∠*NВC* = ∠*NCВ* = 50°, то *BN* = *CN*. Тогда биссектриса *NF* треугольника *ВNC* является его осью симметрии, поэтому *BF* = *СF*, то есть ∠*FCB* = ∠*FВC* = 30°. Значит, ∠*ЕFC* = 60° = ∠*FВN* + ∠*FNВ* = ∠*ЕFN*. Следовательно, *FE* – биссектриса угла *NFC*. Так как ∠*ЕСF* = 10° = ∠*ЕСN*, то *СЕ* – биссектриса угла *FCN*, поэтому *Е* – центр вписанной окружности треугольника *CFN*.

Рис. 1

Так как ∠*CМB* = ∠*MEВ* = 70°, то треугольник *МВЕ* – равнобедренный, *BG* – его биссектриса, значит, *BG*^*ЕМ*. Тогда и треугольник *МNЕ* – равнобедренный, следовательно, ∠*NMЕ* = ∠*NЕG* = 90° – 20° – 40° = 30°.



Второй способ. На стороне *ВС* данного треугольника построим равносторонний треугольник *ТВС* (см. рис. 2). В треугольнике *ВМС*: ∠*ВМС* = 180° – (∠*МBС* + ∠*МСB*) = 70° = ∠*МBС*, значит, *МС* = *ВС* = *TC*, то есть треугольник *МСТ* – равнобедренный. Так как ∠*АСМ* = ∠*АСВ* – ∠*МСB* = 10° = ∠*АСТ*, то *СА* – его биссектриса.

Рис. 2

Кроме того, ∠*NСВ* = 50° = ∠*NВC*, следовательно точка *N* лежит на оси симметрии *ТН* треугольника *ВСТ*. Так как точка *N* лежит также на оси симметрии *СА* треугольника *МСТ*, то ∠*NMС* = ∠*NТС* = 30°.



Третий способ.

Из условия задачи следует, что *BN*^*СМ*, *BN* = *CN* и *МС* = *ВС* (см. рис. 3). Пусть *BN* и *СМ* пересекаются в точке *K*, *CN* = 1, тогда из треугольника *KNC*: *KN* = sin10°, *KC* = cos10°. Пусть *Р* – середина *ВС*, тогда из треугольника *PNC*: *PC* = sin40°, значит, *МС* = 2*PC* = 2sin40°. Тогда *MK* = *МС* – *KC* = 2sin40° – cos10°.

Рис. 3

1. *В турнире по шахматам каждый шахматист половину всех очков набрал во встречах с участниками, занявшими три последних места (каждый участник сыграл с каждым один раз). Сколько всего человек принимало участие в турнире? (За победу в матче присуждается 1 очко, ничья – 0,5, поражение – 0).*

**Решение.**

  Будем для краткости называть игроков, занявших последние три места, *плохими*, а всех остальных – *хорошими*. Плохие игроки сыграли между собой три партии, и в этих партиях было набрано в общей сложности три очка. По условию, это – половина всех очков, набранных плохими игроками; значит, в играх с хорошими плохие игроки набрали ещё 3 очка. Но всего между плохими и хорошими игроками было сыграно 3(*n* – 3)  партий и разыграно столько же очков (*n* – общее число игроков). Из них 3 очка взяли плохие игроки, а остальные очки – хорошие. Следовательно, в партиях с плохими игроками хорошие игроки завоевали  3(*n* – 3) – 3 = 3(*n* – 4)  очков, и, значит, столько же очков хорошие игроки набрали (в общей сложности) в играх друг с другом. Между хорошими игроками было проведено  ½ (*n* – 3)(*n* – 4)  партий и разыграно столько же очков. Следовательно,  (*n* – 3)(*n* – 4) = 6(*n* – 4),  откуда  *n* = 4  или  *n* = 9.  Первый вариант должен быть исключён, так как в этом случае единственный хороший игрок набрал бы 0 очков, то есть не был бы первым. Остаётся одно решение:  *n* = 9.

  Для 9 игроков такое могло случиться: пример соответствующей турнирной таблицы приведен ниже.