Учитель математики ГУО «Годылевский УПК д/с-СШ»
М.А.Архипенко

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ОЛИМПИАДАМ
V - VI классы.
Натуральные числа, 15 часов

1.Хотят поскорее поджарить три ломтика булки. На сковородке уменьшается два ломтика, причем на поджаривание одной стороны ломтика затрачивается одна минута. За какое наименьшее число минут можно поджарить с обеих сторон три ломтика?

2.Докажите, что из трех любых натуральных чисел всегда можно выбрать такие два, сумма которых делится на 2.

3.Найдите цифры сотен и единиц числа 72*3*, если это число делится без остатка на 45.

4. К числу 43 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное четырехзначное число делилось на 45. Найдите все решения.

5. Почему не существует числа, которое при делении на 15 дает в остатке 6, а при делении на 24 дает в остатке 4?

6. В книге 145 страниц. Сколько печатных знаков для цифр при нумерации страниц должен был набрать наборщик в типографии?

7.Для нумерации страниц словаря потребовалось 2007 цифр. Сколько страниц в словаре?

8.Для нумерации страниц учебника математика 5 класса потребовалось 826 страниц. Сколько цифр понадобилось для нумерации страниц учебника, если он начинается со страницы 3?

9. Для нумерации страниц в книге потребовалось 2322 цифры. Сколько страниц в книге? (считаем, что нумерация начинается с первой страницы)

10.Для нумерации страниц учебника потребовалось 411 цифр. Сколько страниц в учебнике?

11. В школьном дневнике 48 листов. Вова пронумеровал все страницы дневника по порядку от 1 до 96. Однажды Вове поставили в дневник двойку. Чтобы скрыть этот факт от родителей, он вырвал лист с двойкой. Тут из дневника выпал и тот лист, который соединялся с вырванным. Найдите сумму номеров всех удаленных из дневника страниц?

12. Напишите самое маленькое четырехзначное число, которое при делении на 6 дает в остатке 5.

13. Имелось 7 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на 7 частей. Некоторые из полученных кусков снова разрезали на 7 частей и т.д. Когда потом подсчитали общее число получившихся листов бумаги (разного размера), то оказалось, что их 2008. Докажите, что подсчет был произведен неправильно.

14. Барон Мюнхгаузен утверждал, что ему удалось найти такое натуральное число, произведение цифр которого равно 6552. Докажите, что он, как всегда, сказал неправду.

15. Найдите двузначное число, которое при делении на 2,3,4,5,6 каждый раз дает остаток 1.

16. Найдите положительное наименьшее число, которое при делении на 2,3,5,7 и 11 дает в остатке 1.

17.Найдите натуральное наименьшее число, большее чем 12, которое при делении на 9 дает в остатке 3, при делении на 10 дает в остатке 2, при делении на 11 дает остаток 1, а при делении на 12 дает остаток 0.

18. Найдите наименьшее число, которое при делении на 2,3,4,5,6 дает в остатке 1, а на 7 делится без остатка.

19. Определите наименьшее число, которое при делении на 2,3,4,5,6,8,9 дает в остатке 1.

20. При каких натуральных х дробь (4х+7):5 является целым числом.

21.Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное равно 2496, а наибольший общий делитель 24?

22. Найдите закономерность в построении последовательности: 111,213,141,516,171,819,202,122…

23. Какая цифра стоит в последовательности 12 341 234… на 2009 –м месте?

24. Установите закономерность в последовательности и запишите следующее число: 15,29,57,113,225…

25. Найти сумму чисел 1+2+…+800.

26. Из числа 12 345 678 910 111 213 …5 960 вычеркните сто цифр так, чтобы полученное число было наибольшим.

27. Верно ли, что число 1 234 567 896 543 является квадратом некоторого натурального числа?

УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

Задачи для подготовки к олимпиадам

5,6 класс. Натуральные числа, 15 часов

1.Вначале кладут на сковородку два ломтика. Через минуту один ломтик переворачивают, а второй снимают и вместо него кладут третий ломтик, через минуту снимают первый, переворачивают второй и кладут третий. Таким образом, за 3 минуты 3 ломтика поджарены с двух сторон.

2. Так как натуральные числа могут быть либо четными, либо нечетными, то среди трех чисел будет, по крайней мере, два числа одинаковой четности. Сумма двух чисел одинаковой четности всегда четна.

3. Ответ: 72630 или 72135

4. Ответ: 2430 или6435.

5. По первому условию оно должно делиться на 3, а по другому условию при делении на 3 дает в остатке 1.

6.$9\cdot 1+90\cdot 2+46\cdot 3=327$

7.На 9 страницах по одной цифре, на 90 страницах по 2 цифры. Оставшиеся 1818 цифр записаны на 1818:3=606страницах. Всего в словаре 606+90+9=796 страниц.

8. Ответ: 310 страниц**.**

9. Первые 9 страниц нумеруем однозначными числами, следующие от 9 до 99 – двухзначными. Далее, начиная с 100, используем трехзначные числа. $9+90\cdot 2+(x-99)\cdot 3=2322$. $x=810$. В книге 810 страниц.

10. В книге 173 страницы. Однозначными числами пронумеровано 9, двузначными – 90 и трехзначными – 74.

11. удалена одна из следующих пар листов: (1;48), (2;47),…(23;26), (24;25).Сумма номеров страниц, стоящих на листах каждой такой пары одна и та же. 1+96=97. 2+95=97… Значит сумма равна $97\cdot 2=194$.

12. Найдем самое большое трехзначное число, которое делится на 6. Это 996, а искомое число на 5 больше, 996+5=1001.

13.При разрезании одного листа на 7 частей общее количество листов увеличивается на 6, оно будет иметь вид $6x+7=6x+6+1=6y+1$. Но 2008 так представить нельзя.

14.Чтобы проверить утверждение Мюнхгаузена, разложим число 6552 на простые множители. $6552=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7\cdot 13$, но число 13 это не цифра, значит, Мюнхгаузен врал.

15. Искомое число, уменьшенное на 1, делится на простые делители 3,4 и 5. Значит, оно делится на $3\cdot 4\cdot 5=60$. Тогда искомое число 60+1=61.

16. $x-1=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot a$; $x=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot a+1$. Так как число наименьшее, то $a=1$, искомое число будет 2311.

17. 1992. НОК(9,10,11,12)+12=1992,

18. НОК(2,3,4,5,6)=60. Число 61при делении на 7 дает в остатке 5, поэтому число 60 нужно увеличить во столько раз, чтобы остаток от деления полученного числа на 7 после прибавления 1 давал число, кратное 7. $60\cdot 5+1=301$.

19. $9\cdot 8\cdot 5+1=361$

20. x при делении на 5 должно давать в остатке 2, значит $x=5a+2$, a – любое число.

21. Пусть пара (А;В) удовлетворяют условию задачи. Тогда А=24к, В=24с, где к и с взаимно простые натуральные числа. Поскольку произведение двух натуральных чисел равно произведению их НОК и НОД, то $к\cdot с=104$. А так как $104=8\cdot 13$, то имеются следующие пары: к=1; с=104; к=8;с=13; к=13; с=8; к=104; с=1. И следовательно существует 4 пары натуральных чисел, удовлетворяющих условию задачи.

22. В последовательности 11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23…просто переставили запятые.

23. Каждая четвертая цифра в последовательности – 4, а за ней стоит 1. $2009=2008+1=502\cdot 4+1$.

24. Чтобы получить очередное число, нужно предыдущее умножить на 2 и из результата вычесть 1.Последующее число 449,

25. $(1+800)+(2+799)+…+(400+401)=801\cdot 400=320400$.

26. 99 999 785 960. Искомое число начинается с наибольшего возможного числа девяток. Будем «двигаться» по числу слева направо, вычеркивая все цифры, кроме 9. Вначале мы вычеркиваем 27 цифр: 12345678 9 1011121314151617181 9…5960и получим число 9920212223242526272829…5960 и т.д. Таким образом, до каждой очередной девятки, мы добираемся, вычеркивая 19 цифр. Сделав еще два шага, мы зачеркнем 38 цифр и получим число 99 999 5051525354555657585960. За предыдущие шаги мы вычеркнули 84 цифры (на осталось вычеркнуть еще 16), следовательно, до очередной 9 мы не доберемся. Наибольшая цифра, до которой мы можем добраться, вычеркнув 15 цифр, это7. Далее вычеркнем 5, мы получим возможное наибольшее число.

27. Нет. Квадрат натурального числа может оканчиваться только на цифры 0,1,4,5,6 и 9, но не на 3.