Подготовила учитель математики
ГУО «Годылевский УПК д/с-СШ»
М.А.Архипенко

ФРАГМЕНТ ФАКУЛЬТАТИВНОГО ЗАНЯТИЯ «Подготовка к олимпидам», IX- XI классы

(занятие спланировано с учетом, что учащиеся ознакомлены с принципом Дирихле в предыдущих классах)

Тема: Методы решения олимпиадных задач. Принцип Дирихле
Цель:
1.Расширение и углубление знаний учащихся через изучение принципа Дирихле.
2.Развитие логического мышления.
3.Развитие творческих способностей и исследовательских умений.
4.Воспитание настойчивости, инициативы, самостоятельности.

Ход занятия

I.Задачи на отдельных листочках для самостоятельного решения.
Задача1. В классе 37 учащихся. Докажите, что среди них найдется 4 человека, родившиеся в один и тот же месяц?
Решение. В году 12 месяцев – это «клетки». 37 учеников – это «кролики». Если 37 «кроликов» рассадим в 12 «клеток», то получится 3 и один «кролик» останется. Значит, в какой-то «клетке» будет обязательно 4 «кролика», т.е. найдется 4 человека, родившиеся в один и тот же месяц?

II. Вводная беседа учителя о данном принципе Дирихле.

При решении таких задач и большинства других задач «на доказательство», применяется «принципа Дирихле». (Дирихле – известный немецкий математик, живущий в 19 веке.) Принцип Дирихле: Если m кроликов разместить в n клетках, и при этом m > n, то по крайней мере в одной из клеток окажется не меньше, чем два кролика.

В роли предметов (кроликов, зайцев) и ящиков (клеток) могут выступать различные математические объекты – числа, отрезки и т.д. Принцип Дирихле может иметь и другие формулировки. Например, следующие:

А)Если в каждой клетке нету больше чем одного кролика, то количество кроликов не превышает количество клеток.

Б) Если количество клеток больше за количество кроликов, то хотя бы в одной клетке нет кроликов.

В геометрии принцип Дирихле может применяться в следующих формулировках:

В) Если на отрезке (окружности) длиной 1 расположено несколько отрезков (дуг), сумма длин которых больше чем 1, то по меньшей мере два (две) из них имеют общую точку.

Г) Если внутри фигуры площадью 1 расположено несколько фигур, сумма площадей которых больше чем 1, то по меньшей мере две из них имеют общую точку.

Возможны и другие варианты этой же идеи:

Д) Если множество А содержится в множестве В и объем (площадь, длина) А строго меньше чем В, то в В содержаться точки, которые не принадлежат А.

Е) Если на отрезке длиной L расположено несколько отрезков , сумма длин которых больше чем L , то хотя бы два из них имеют общую точку.

Ж) Если внутри фигуры площадью S расположено несколько фигур, сумма площадей которых больше чем S, то хотя бы две из них имеют общую точку.

З) Если на отрезке длиной L расположено несколько отрезков , сумма длин которых больше чем L , то хотя бы два из них имеют общую точку.

III. Задачи для устного решения:

1. В коллекции имеется 25 монет по 1,2,3 и 5 копеек. Имеется ли среди них 7 монет одинакового достоинства?

Решение. Имеется. В худшем случае могло быть по 6 монет каждого достоинства, тогда всего бы монет было 4·6=24, но монет было 25. Следовательно, имеется 7 монет одинакового достоинства.

2.Коля подсчитал, что за день в завтрак, обед и ужин он съел 10 конфет. Докажите, что хотя бы один раз он съел не меньше 4 конфет.

Решение. В худшем случае каждый прием пищи Коля ел по три конфеты- всего 9 конфет. 4-ю конфету он съест в какой-либо прием пищи четвертой. То есть, хотя бы один раз Коля съел не меньше четырех конфет.

3.В соревнованиях участвовало 35 спортсменов. Можно ли утверждать, что среди них найдутся хотя бы два спортсмена, фамилии которых начинаются с одной и той же буквы?

Решение. Обозначим 35 спортсменов за «кроликов», а буквы – за «клетки». В русском алфавите 33 буквы. Кроме этого фамилии не могут начинаться с букв ъ и ь. Значит, у нас осталась 31 буква. Так как 35>31, то по принципу Дирихле, найдется два спортсмена, у которых фамилия начинается с одной буквы.

IV. Задачи для совместного решения.

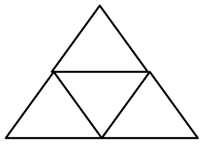
4. Дано 12 натуральных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых делится на 11.

Решение. Примем числа за «кроликов». Так как их 12, то клеток должно быть меньше. Пусть «клетки» - это остатки от деления натурального числа на 11. Всего клеток будет 11:1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11. Тогда, по принципу Дирихле, найдется «клетка», в которой будет сидеть не менее чем два

«кролика», т.е. найдутся два натуральных числа с одним и тем же остатком. А разность двух чисел с одинаковым остатком от деления на 11 будет делиться на 11.
Пусть $a=11m+g$, $b=11n+g$, тогда $a-b=11m+g-(11n+g)=11(m-n)$.
А число $11(m-n)$ делится на 11.

5. Внутри равностороннего треугольника со стороной 1см расположено 5 точек. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 0,5см.

Решение. Пусть 5 точек будут «кроликами». По принципу Дирихле, клеток должно быть меньше, и чаще всего на одну, значит, надо 4 клетки. Их можно получить, разбив равносторонний треугольник с помощью проведения средних линий.



Тогда получим 4 равносторонних треугольника со стороной по 0,5см, которые и будут «клетками».
Так как «кроликов» - 5, а «клеток» - 4, и 5 > 4, то, по принципу Дирихле, найдется «клетка» - равносторонний треугольник со стороной 0,5см, в которой попадут не менее двух «кроликов» - точек. А так как все четыре треугольника равны и расстояние между точками в любом треугольнике будет меньше, чем 0,5см, то тем самым доказано, что между некоторыми точками из пяти расстояние будет меньше, чем 0,5см.

V.Задача для самостоятельного решения.

6.Верно ли, что из шести любых натуральных чисел, найдутся два числа, разность которых делится на 5?

Решение. Да. «Кроликами» будут любые 6 чисел. Целые числа при делении на 5 могут давать пять различных остатков: 0,1,2,3,4. Получаем 5 клеток, в каждую из которых будем сажать числа, дающие одинаковый остаток при делении на 5. Имеется шесть кроликов в пяти клетках. Значит, обязательно найдется два числа, дающие одинаковые остатки при делении на 5. Следовательно, их разность делится на 5 нацело.

VI. Подведение итогов. Рефлексия