Ответы

**№1.** Доказать, что для любых чисел *а*, *b* и *с* хотя бы одно из неравенств , ,  окажется истинным.

**№1**. *Решение*

Предположим противное: пусть все неравенства из условия задачи – ложные. Тогда истинными окажутся неравенства: , , . Сложим данные неравенства:









Получили, что сумма квадратов трех чисел является отрицательной, что невозможно. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

**№2.** Пусть *а, b, с* – попарно различные действительные числа, не равные нулю. Доказать, что всегда хотя бы одно из уравнений , ,  имеет решения.

**№2.** ***Решение.***

Предположим противное: пусть никакое из уравнений , ,  не имеет решений. Тогда дискриминант каждого из этих уравнений будет отрицательным:

, , .

Сложим последние три неравенства: .

Далее,

,



Последнее неравенство невозможно, так как квадрат любого числа неотрицателен. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

**№3**. Найти все четверки натуральных чисел *а, b, с* и *d* таких, что

 

**№**3 ***Решение.***

Сложив уравнения системы, получим: 

Далее выполним преобразования: 

, 

.

Число 2013 можно единственным способом представить в виде произведения трех натуральных множителей, каждый из которых больше 1: . Из этих трех множителей, только число 61 можно представить виде суммы квадратов чисел: . Тогда *а* = 5, *b* = 6 или *а* = 6, *b* = 5. Легко получить, что *с* = 2, *d*=10 или *с* = 10, *d*=2.

Получаем возможные наборы чисел (*а, b, с, d*):

(5, 6, 2, 10), (6, 5, 2, 10), (5, 6, 10, 2), (6, 5, 10, 2).

Подставляя данные наборы в исходные уравнения, получим единственное решение: *а* = 5, *b* = 6,

*с* = 10, *d* = 2.

***Ответ*:** *а* = 5, *b* = 6, *с* = 10, *d* = 2**.**

**№4**. Даны натуральные числа *а, b, с, d, е, f* такие, что .

Чему равна сумма ?

**№4**.***Решение***

Выполним преобразования:

.

.

.



. (\*)

Итак, число 2013 представили в виде произведения трех множителей, каждый из которых больше 1. Поскольку 2013 имеет следующее разложение на простые множители: , то такое представление единственно (с точностью до перестановки множителей).

Таким образом, среди множителей левой части (\*) встречаются числа 3, 11 и 61.

Тогда = = 3 + 11 + 61 = 75.

***Ответ*: 75.**

**№5.** Из картона вырезали правильный треугольник. Середины сторон этого треугольника соединили отрезками. В результате треугольник оказался разбит на 4 правильных треугольника меньшего размера. Имеются краски трех различных цветов. Сколькими способами можно раскрасить картонный треугольник при помощи данных красок так, чтобы выполнялись условия:

1) каждый «маленький» треугольник был окрашен в один цвет;

2) любые два «маленьких» треугольника, имеющие общую сторону, должны быть окрашены в разные цвета.

Различными считаются раскраски, которые не совмещаются при вращении треугольника.

*Замечание.* При раскраске не обязательно использовать краски всех трех цветов.

**№5. *Решение*.**

Центральный треугольник можно закрасить тремя способами. При каждом таком способе существует два способа покраски угловых треугольников в один цвет (одной из двух оставшихся красок) и два способа покраски угловых треугольников в два цвета (два треугольника покрасить одной краской и один другой). Итого имеем 3·(2+2)=12 способов.

***Ответ*:** 12 способов.

**№6**. Из картона вырезали правильный треугольник. Середины сторон этого треугольника соединили отрезками. В результате треугольник оказался разбит на 4 правильных треугольника меньшего размера. Имеются краски четырех различных цветов. Сколькими способами можно раскрасить картонный треугольник при помощи данных красок так, чтобы каждый «маленький» треугольник был окрашен в один цвет и любые два «маленьких» треугольника, имеющие общую сторону, должны быть окрашены в разные цвета. Различными считаются раскраски, которые не совмещаются при вращении треугольника.

*Замечание.* При раскраске не обязательно использовать краски всех четырех цветов.

**№6.** ***Решение***.

Центральный треугольник можно закрасить четырьмя способами. При каждом таком способе существует:

1. 3 способа покраски угловых треугольников в один цвет: одной из трех оставшихся красок;
2. 2 способа покраски угловых треугольников в три цвета: если обозначить оставшиеся цвета цифрами 1, 2, 3, то эти цвета можно расположить по углам по часовой или против часовой стрелки;
3. 6 способов покраски угловых треугольников в два цвета: из трех оставшихся красок две можно выбрать тремя способами (1 и 2, 1 и 3, 2 и 3), а угловые треугольники выбранными красками можно покрасить двумя способами: два треугольника покрасить одной краской и один другой или наоборот

Всего способов будет 4·(3+2+6) = 44 способа.

***Ответ*:** 44 способа.

**№7.** Дана прямоугольная доска размером 62×130 клеток. Какое наибольшее количество прямоугольных пластин размера 1×4 можно разместить на этой доске? Каждая пластина должна полностью закрывать 4 клетки доски.

**№7.**  ***Решение***.

Если от данной доски отрезать уголок размера 2×2, то оставшаяся часть доски может быть легко замощена прямоугольниками 1×4. Таких прямоугольников на доске уместится . Докажем, что большее число прямоугольников разместить не удастся. Разобьем доску на квадраты размера 2×2 и раскрасим эти квадраты в шахматном порядке в черный и белый цвета. Пусть при этом угловые квадраты будут черными. Имеем доску 31×65, состоящую из квадратов 2×2. Легко видеть, что общее количество таких квадратов будет нечетным и черных квадратов будет на 1 больше, чем белых, т.е. черных клеток будет на 4 больше, чем белых. Далее, заметим, что каждый прямоугольник 1×4 закрывает ровно 2 черные и 2 белые клетки, поэтому, если даже закрыть все белые клетки, то 4 черные клетки останутся незакрытыми. Всего на доске будет закрыто не более, чем 62⋅130–4 = 8056 клеток, что означает что на доске уместится не более, чем 8056:4=2014 прямоугольников.

***Ответ****:* 2014.

**№ 8.**

 Для того, чтобы уложить паркетом пол квадратной комнаты, были куплены 4 одинаковые коробки с паркетными плитками вида . Все плитки были израсходованы, и пол был полностью уложен. Можно ли было пол этой же комнаты выложить плитками вида  ?

**№ 8.**

 ***Решение***

Пусть в каждой коробке было *n* плиток вида . Тогда всего было 4*n* таких плиток. Следовательно, на квадратном полу помещается 16*n* клеток размера 1×1. Так как площадь квадрата (выраженная в квадратиках 1×1) кратна 16, то сторона квадрата кратна 4. Разобьем квадратный пол на квадраты размера 4×4, а такой квадрат можно легко замостить плитками вида : две плитки закрывают прямоугольник 4×2. Итак, замостить пол плитками второго вида можно.

 ***Ответ*: можно.**

**№9.**

 Рабочие должны были выложить пол прямоугольной комнаты плитками двух видов:

1) и 2) .

Размеры пола таковы, что он может быть полностью покрыт некоторым набором плиток указанных размеров. Нужное количество плиток каждого размера было подготовлено. Однако при переносе их к месту работы, рабочие уронили ящик с плитками первого вида и 6 плиток (первого вида) разбились. Их решили заменить тремя плитками второго вида. Докажите, что теперь выложить поверхность пола имеющимися плитками не удастся. (Резать плитки запрещается.)

**№9.** ***Решение.***

Разобьем пол на квадраты 1×1 (из условия следует, что это можно сделать) и раскрасим полученные квадраты в шахматном порядке в черный и белый цвета. Тогда 6 плиток вида 1 покрыли бы 6 черных и 6 белых клеток (т.е. четное количество). Но одна плитка вида 2 покрывает неодинаковое число черных и белых клеток: 3 черных и 1 белую, или 1 черную и 3 белые клетки. Тогда 3 плитки вида 2 покроют нечетные количества черных и белых клеток. Получили противоречие. Значит, выложить поверхность пола имеющимися плитками не удастся. Что и требовалось доказать.

**№ 10.**Дана квадратная доска размером 22×22 клеток. Какое наибольшее количество прямоугольных пластин размера 1×4 можно разместить на этой доске? Каждая пластина должна полностью закрывать 4 клетки доски.

 **№ 10.***Решение*.

Если от данной доски отрезать уголок размера 2×2, то оставшаяся часть доски может быть легко замощена прямоугольниками 1×4. Таких прямоугольников на доске уместится . Докажем, что большее число прямоугольников разместить не удастся. Разобьем доску на квадраты размера 2×2 и раскрасим эти квадраты в шахматном порядке в черный и белый цвета. Пусть при этом угловые квадраты будут черными. Всего квадратов будет 11⋅11=121. При этом 60 квадратов будут белыми и 61 черными, т.е. черных клеток будет на 4 больше, чем белых. Далее, заметим, что каждый прямоугольник 1×4 закрывает ровно 2 черные и 2 белые клетки, поэтому, если даже закрыть все белые клетки, то 4 черные клетки останутся незакрытыми. Всего на доске будет закрыто не более, чем 222 – 4 = 480 клеток, что означает что на доске уместится не более, чем 480:4=120 прямоугольников.

***Ответ:* 120**.