**Методические рекомендации для обучающихся по изучению темы «Элементы комбинаторики»**

Методические рекомендации содержат теоретический материал по теме, примеры решений задач, задачи для решений с ответами

**Теоретический материал**

Комбинаторика – это самостоятельный раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчинённых тем или условиям, можно составить из заданных элементов.

Термин “КОМБИНАТОРИКА” происходит от латинского слова “combina”, что в переводе на русский означает – “сочетать”, “соединять”.

Задачей комбинаторики можно считать задачу размещения объектов по специальным правилам и нахождение числа способов таких размещений.

Правила комбинаторики: Комбинаторика – это раздел математики, в котором изучаются простейшие “соединения”: **перестановки, размещения, сочетания.**

**1. Правило суммы.**  Если два действия А и В взаимно исключают друг друга, причем действие А можно выполнить m способами, а В – n способами, то выполнить одно любое из этих действий (либо А, либо В) можно n + m  способами.

 **Пример 1**. В классе учится 16 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно назначить одного дежурного?

*Решение*

Дежурным можно назначить либо мальчика, либо девочку, т.е. дежурным может быть любой из 16 мальчиков, либо любая из 10 девочек.

По правилу суммы получаем, что одного дежурного можно назначить 16+10=26 способами.

**2.  Правило произведения.**  Если элемент А можно выбрать п способами, элемент В выбрать m способами, то комбинацию , состоящую из А и В элементов можно выбрать N =n•m способами.

**Пример 2.**

В классе учится 16 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно назначить двух дежурных?

*Решение*

Первым дежурным можно назначить либо мальчика, либо девочку. Т.к. в классе учится 16 мальчиков и 10 девочек, то назначить первого дежурного можно 16+10=26 способами.

После того, как мы выбрали первого дежурного, второго мы можем выбрать из оставшихся 25 человек, т.е. 25-ю способами.

По теореме умножения двое дежурных могут быть выбраны 26\*25=650 способами.

**1.**Классической задачей комбинаторики является задача о числе перестановок без повторения.

**Перестановки**-соединения, которые можно составить из одних и тех же n различных предметов, меняя всеми возможными способами их порядок. Число всех возможных перестановок обозначается Р*п* и оно равно Р*п* = *п*! 

Произведение всех натуральных чисел от n до единицы, обозначают символом n! (Читается “эн - факториал”). Используя знак факториала, можно, например, записать:

1! = 1,

2! = 2•1 = 2,

3! = 3 •2 •1 = 6,

4! = 4 •3 •2 •1 = 24,

5! = 5 •4 •3 •2 •1 = 120.

Необходимо знать, что 0!=1

**Пример 3.** Сколько можно составить четырехбуквенных «слов» из букв слова «брак»?

*Решение*

Генеральной  совокупностью  являются 4  буквы слова  «брак» (б, р, а, к). Число  «слов» определяется перестановками этих 4 букв, т. е.



**Пример 4**. Сколькими способами 7 книг разных авторов можно расставить на полке в один ряд?

**Решение:** Р7 = 7!, где 7! = 1 \* 2 \* 3 \* 4 \* 5 \* 6 \* 7 =5040, значит существует 5040 способов осуществить расстановку книг.

**Ответ:** 5040 способов.

**Пример 5.** В знаменитой басне Крылова “Квартет” “…Проказница мартышка, Осел, Козел да косолапый Мишка…” исследовали влияние взаимного расположения музыкантов на качество исполнения. Зададим вопрос: Сколько существует способов, чтобы рассадить четырех музыкантов?

**Решение:** Р4 = 4!, где 4! = 1 \* 2 \* 3 \* 4 = 24, значит существует 24 способа осуществить рассадку музыкантов

**Ответ:** 24 способа.

**2.Размещения** – соединения, содержащие по m предметов из числа n данных, различающихся либо порядком предметов, либо самими предметами; число их.

****

Классической задачей комбинаторики является задача о числе размещений без повторений, содержание которой можно выразить вопросом: *сколькими* *способами* *можно* *выбрать* *и* *разместить* *по* *m различным* *местам* *m из* *n различных* *предметов?*

В комбинаторике **размещением** называется расположение “предметов” на некоторых “местах” при условии, что каждое место занято в точности одним предметом и все предметы различны. В отличие от сочетаний размещения учитывают порядок следования предметов. Так, например, наборы < 2,1,3 > и < 3,2,1 > являются различными, хотя состоят из одних и тех же элементов {1,2,3} (то есть, совпадают как сочетания).

**Примеры решения задач:**

**Пример 6.** Сколько можно составить телефонных номеров из 6 цифр каждый, так чтобы все цифры были различны? Это пример задачи на размещение без повторений.

Размещаются здесь десять цифр по 6. Значит, ответ на выше поставленную задачу, где предметов m = 6, а из числа n=10 данных будет:



**Ответ**:151200 способов

**Пример 7.**  В группе № 21 обучается 24 студента. Сколькими способами можно составить график дежурства по техникуму, если группа дежурных состоит из трех студентов?

**Решение:**число способов равно числу размещений из 24 элементов по 3, т.е. равно А243. По формуле находим

**

**Ответ:** 12144 способа

**Пример 8.**

В некоторой газете 12 страниц. Необходимо на страницах этой газеты поместить четыре фотографии. Сколькими способами можно это сделать, если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии?

*Решение.*

В  данной  задаче мы не просто выбираем фотографии, а размещаем их на определенных страницах газеты, причем каждая страница газеты должна содержать не более одной фотографии. Таким  образом,  задача сводится к классической задаче об определении числа размещений без повторений из 12 элементов по 4 элемента:



Таким образом, 4 фотографии на 12 страницах можно расположить 11880 способами.

**3.Сочетания**-соединения, содержащие по m предметов из n, различающиеся друг от друга, по крайней мере, одним предметом; число их .

В комбинаторике **сочетанием** из *n* по *m* называется набор *m* элементов, выбранных из данных *n* элементов. Наборы, отличающиеся только порядком следования элементов (но не составом), считаются одинаковыми, этим сочетания отличаются от размещений.

Содержание задач можно выразить вопросом: *сколькими* *способами* *можно* *выбрать* *m из* *n различных предметов?*

**Примеры решения задач:**

**Пример 9.** Сколько трехкнопочных комбинаций существует на кодовом замке (все три кнопки нажимаются одновременно), если на нем всего 10 цифр?

**Решение:** Так как кнопки нажимаются одновременно, то выбор этих кнопок – сочетание. Отсюда возможно



**Ответ:** 120 вариантов.

**Пример 10.** Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 3 членов, можно образовать из 10 преподавателей?

**Решение:** По формуле находим:

**

**Ответ:** 120 комиссий.

**Пример 11.**

Необходимо выбрать в подарок 4 из 10 имеющихся различных книг. Сколькими способами можно это сделать?

 *Решение*

Нам из 10 книг нужно выбрать 4, причем порядок выбора не имеет значения. Таким образом, нужно найти число сочетаний из 10 элементов по 4:

.

**Пример 12**. В 9 классе учатся 7 учащихся, в 10 - 9 учащихся, а в 11 - 8 учащихся. Для работы на пришкольном участке надо выделить двух учащихся из 9 класса, трех – из 10, и одного – из 11 . Сколько существует способов выбора учащихся для работы на пришкольном участке?

**Решение:** Выбор из трёх совокупностей без учёта порядка, каждый вариант выбора из первой совокупности (С72) может сочетаться с каждым вариантом выбора из второй (С93)) и с каждым вариантом выбора третьей (С81) по правилу умножения получаем:

 Ответ: 14 112 способов.

**Задачи для решения на закрепление**

**Задача № 1**. Сколькими способами могут быть расставлены 5 участниц финального забега на 5-ти беговых дорожках?

**Задача №2.**Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

**Задача № 3.** Сколькими способами четверо юношей могут пригласить четырех из шести девушек на танец?

**Задача № 4**. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 при условии, что в записи числа каждая цифра используется только один раз?

**Задача№5** Сколькими способами из 7 человек можно выбрать комиссию, состоящую из 3 человек?

**Задача № 6.** В соревновании участвуют 12 команд. Сколько существует вариантов распределения призовых (1, 2, 3) мест?

**Задача № 7.**  На соревнованиях по лёгкой атлетике нашу школу представляла команда из 10 спортсменов. Сколькими способами тренер может определить, кто из них побежит в эстафете 4×100 м на первом, втором, третьем и четвёртом этапах?

**Задача № 8.**Сколькими способами можно выложить в ряд красный, черный, синий и зеленый шарики?

**Задача № 9**. Учащимся дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?

**Решение задач на закрепление**

**Задача № 1**. Сколькими способами могут быть расставлены 5 участниц финального забега на 5-ти беговых дорожках?

**Решение:** Р5 = 5!= 1 ∙2 ∙3 ∙4 ∙5 = 120 способов.

**Задача №2.**Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

**Решение**: Число всех перестановок из трех элементов равно

Р3=3!, где 3!=1 \* 2 \* 3=6. Значит, существует шесть трехзначных чисел, составленных из цифр 1,2,3.

**Задача № 3.** Сколькими способами четверо юношей могут пригласить четырех из шести девушек на танец?

**Решение**: два юноши не могут одновременно пригласить одну и ту же девушку. И варианты, при которых одни и те же девушки танцуют с разными юношами, считаются разными, поэтому:



**Задача № 4**. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 при условии, что в записи числа каждая цифра используется только один раз?

**Решение:** В условии задачи предложено подсчитать число всевозможных комбинаций из трех цифр, взятых из предположенных девяти цифр, причём порядок расположения цифр в комбинации имеет значение (например, числа 132 и 231 различные). Иначе говоря, нужно найти число размещений из девяти элементов по три. По формуле числа размещений находим:



 Ответ:504 трехзначных чисел.

**Задача№5** Сколькими способами из 7 человек можно выбрать комиссию, состоящую из 3 человек?

**Решение:** Чтобы рассмотреть все возможные комиссии, нужно рассмотреть все возможные 3 – элементные подмножества множества, состоящего из 7 человек. Искомое число способов равно

****

**Задача № 6.** В соревновании участвуют 12 команд. Сколько существует вариантов распределения призовых (1, 2, 3) мест?

**Решение:** А123 = 12 ∙11 ∙10 = 1320 вариантов распределения призовых мест. Ответ: 1320 вариантов.

**Задача № 7.**  На соревнованиях по лёгкой атлетике нашу школу представляла команда из 10 спортсменов. Сколькими способами тренер может определить, кто из них побежит в эстафете 4×100 м на первом, втором, третьем и четвёртом этапах?

**Решение:** Выбор из 10 по 4 с учётом порядка:

 способов.

Ответ: 5040 способов.

**Задача № 8.**Сколькими способами можно выложить в ряд красный, черный, синий и зеленый шарики?

**Решение:** На первое место можно поставить любой из четырех шариков (4 способа), на второе – любой из трех оставшихся (3 способа), на третье место – любой из оставшихся двух (2 способа), на четвертое место – оставшийся последний шар. Всего 4 · 3 · 2 · 1 = 24 способа.

 Р4 = 4! = 1 · 2 · 3 · 4 = 24.

 Ответ: 24 способа.

**Задача № 9**. Учащимся дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?

**Решение:** Выбор 6 из 10 без учёта порядка:  способов.

Ответ: 210 способов.