**Занятие 2. Уравнения и неравенства с модулем**

**УРАВНЕНИЯ С МОДУЛЕМ**

Если на олимпиаде или экзамене вам попадётся уравнение с модулем, его можно решить, вообще не зная никаких специальных методов и пользуясь только определением модуля. Правда, занять это может часа полтора драгоценного времени.

Поэтому я сегодня хочу рассказать вам о приёмах, упрощающих решение таких задач.

Прежде всего, вспомним определение модуля.

[https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2022/09/formula47185.gif](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2022/09/formula47185.gif)

Если число x неотрицательное, то модуль x равен самому числу x.

А для отрицательного числа x модуль равен противоположному ему положительному числу -x.

**Рассмотрим различные типы *уравнений с модулем.***

*Начнем с простых заданий.*

Слева модуль, справа число

Это самый простой случай. Нам поможет геометрический смысл модуля.

Модуль числа — это расстояние от нуля до данного числа. Очевидно, расстояние не может быть отрицательным. Оно или положительно, или равно нулю. Например, |-2|=2. Другими словами, расстояние от точки -2 до нуля равно 2. Этим мы пользуемся при решении уравнений.

1. Решим уравнение | x| = 2

Решение:

На числовой прямой есть ровно две точки, расстояние от которых до нуля равно двум. Это точки 2 и -2. Значит, у уравнения |x|=2 есть два решения: x=2 и x=-2.

Ответ: -2; 2.

2. Решите уравнение: \left|8x-3\right|=21 Ответ: -\displaystyle \frac{9}{4};3.

3. Решите уравнение: \left|2x^2-6x+1\right|=9

Решение: Мы получили совокупность двух квадратных уравнений. А затем решили отдельно каждое из них.

Вот что мы делали, решая квадратные уравнения:

x^2-3x-4=0\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{c}x=4 \\x=-1 \end{array}\right. — применили теорему Виета и нашли корни.

x^2-3x+5=0; \;D=9-20=-11\textless 0;\ \  корней нет.

Ответ: -1;4.

4. Решим уравнение |x^2 - 5x + 4| = 4.

Решение:

Задача похожа на предыдущую.

Есть только два числа, модули которых равны четырём. Это 4 и −4. Следовательно, уравнение равносильно совокупности двух простых:

x^2 - 5x + 4 = 4 или x^2 - 5x + 4 = -4.

Второе уравнение не имеет корней. Решения первого: x = 0 и x = 5.

Ответ: 0; 5.

*Слева модуль, справа выражение, зависящее от переменной*

Здесь приходится раскрывать модуль по определению. . . или соображать!

5. |2-x|=5-4x

Решение:

Уравнение распадается на два случая, в зависимости от знака выражения под модулем.

Другими словами, оно равносильно совокупности двух систем:

https://ege-study.ru/wp-content/themes/ege/img/formula42845.gif    https://latex.codecogs.com/gif.latex?\left\%7b\begin%7bmatrix%7d&space;2-x%3C&space;0,\\&space;x-2=5-4x.&space;\end%7bmatrix%7d\right.\\

Решение первой системы: x = 1. У второй системы решений нет.  
Ответ: 1.

6. Решите уравнение \left|\displaystyle \frac{x+1}{x-3}\right| = x. Если уравнение имеет несколько корней, в ответе запишите меньший корень

Решение:

ОДЗ уравнения: x≠3. Так как в левой части уравнения — неотрицательная величина, должно также выполняться условие x\geq 0. Возведем обе части уравнения в квадрат

{\left|\displaystyle \frac{x+1}{x-3}\right|}^2= x{}^{2},

{\left(\displaystyle \frac{x+1}{x-3}\right)}^2- x{}^{2}= 0 (разность квадратов),

(\displaystyle \frac{x+1}{x-3}-x)(\displaystyle \frac{x+1}{x-3}+x)=0, 

\displaystyle \frac{x+1}{x-3}- x=0, 

\displaystyle \frac{x+1}{x-3}+ x=0

\left[ \begin{array}{c}x^2\ -\ 4x\ -\ 1=\ 0 \\x^2\ -\ 2x\ +\ 1=\ 0. \end{array}\right.

Так как x = 2- \sqrt{5 }\textless 0,  это посторонний корень. Уравнение имеет два корня: x = 2 +\sqrt{5} или x=1. Меньший корень: 1.

Ответ: 1

8. |2x^2 -3x -4|=6x-1.

Решение:

Снимать модуль по определению? Страшно даже подумать об этом, ведь дискриминант — не полный квадрат.

Давайте воспользуемся следующим правилом:

Уравнение вида | A| = B  равносильно совокупности двух систем:

https://ege-study.ru/wp-content/themes/ege/img/formula42847.gif    https://latex.codecogs.com/png.latex?\left\%7b\begin%7bmatrix%7d&space;A=-B,\\&space;B\geq&space;0.&space;\end%7bmatrix%7d\right.

То же самое, но немного по-другому:

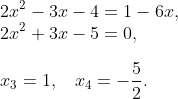
|A|=B\Leftrightarrow \left [ \begin{matrix} A=B,\\ A=-B, \end{matrix}\right. B\geq 0.

Иными словами, мы решаем два уравнения, A = B и A = −B, а потом отбираем корни, удовлетворяющие условию B \geq 0.

Приступаем. Сначала решаем первое уравнение:

https://latex.codecogs.com/png.latex?2x%5e%7b2%7d-3x-4=6x-1,  
https://latex.codecogs.com/png.latex?2x%5e%7b2%7d-9x-3=0,  
https://latex.codecogs.com/png.latex?x_%7b1%7d=\frac%7b9+\sqrt%7b105%7d%7d%7b4%7d,\:&space;\:&space;\:&space;\:&space;x_%7b2%7d=\frac%7b9-\sqrt%7b105%7d%7d%7b4%7d.

Затем решаем второе уравнение:



Теперь в каждом случае проверяем знак правой части:

Подходят только x_1 и x_3.

Ответ: https://latex.codecogs.com/png.latex?1,&space;\,&space;\frac%7b9+\sqrt%7b105%7d%7d%7b4%7d.

*Квадратные уравнения с заменой | x| = t*

Замена переменной — универсальный способ решения всевозможных уравнений. И этот способ помогает нам решать квадратные уравнения, содержащие переменную под знаком модуля.

10. Решим уравнение: x^2 + 2|x| - 3 = 0.

Решение:

Поскольку x^2 = |x|^2, удобно сделать замену |x| = t. Получаем:

https://ege-study.ru/wp-content/themes/ege/img/frm111.png

Ответ: ±1.

*Модуль равен модулю*

Речь идёт об уравнениях вида | A| = | B| . Это — подарок судьбы. Никаких раскрытий модуля по определению! Всё просто:

|A|=|B|\, \, \Leftrightarrow \, \, \left [ \begin{matrix} A=B,\\ A=-B. \end{matrix} \right.

Как мы получили это равенство? Покажем на примере задачи.

8. Решите уравнение: \left|2x+5\right|=\left|x-1\right|

Решение:

Возведем обе части в квадрат, поскольку они неотрицательны.

{\left(2x+5\right)}^2={\left(x-1\right)}^2

Перенесем все в левую часть и воспользуемся формулой разности квадратов

a^2-b^2=\left(a-b\right)\cdot \left(a+b\right)

\Leftrightarrow \left(2x+5-x+1\right)\left(2x+5+x-1\right)=0\Leftrightarrow 

Ответ: -6;-\displaystyle \frac{4}{3}.

11. Решим уравнение: |3x^2 + 5x - 9| = |6x + 15|.

Решение:

Уравнение равносильно следующей совокупности:

\left [ \begin{matrix} 3x^{2}+5x-9=6x+15,\\ 3x^{2}+5x-9=-6x-15. \end{matrix} \right.

Решим каждое из уравнений совокупности и запишем ответ.

1) 3x^2-x-24=0;

D=1+4\cdot 3 \cdot 24 = 289 = 17^2 ;

\displaystyle x=\frac{1 \pm 17}{6} ; x_{-1}=3, \; x_2 = \frac{8}{3} — корни первого квадратного уравнения.

2) 3x^2+11x+6=0;

D=121-4\cdot 3\cdot 6=49=7^2 ;

\displaystyle x=\frac{-11\pm 7}{6}; x_3=-3; \displaystyle x_4=-\frac{2}{3} - корни второго квадратного уравнения.

В ответ запишем все 4 корня.

Ответ: \displaystyle -3; \; - \frac{8}{3}; \; - \frac{2}{3}; \; 3.

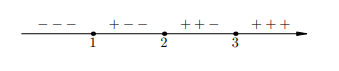
Два или несколько модулей

12. Решим уравнение: |x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4.

Решение:

Не будем возиться с каждым модулем по отдельности и раскрывать его по определению — слишком много получится вариантов. Существует более рациональный способ — метод интервалов.

Выражения под модулями обращаются в нуль в точках x = 1, x = 2 и x = 3. Эти точки делят числовую прямую на четыре промежутка (интервала). Отметим на числовой прямой эти точки и расставим знаки для каждого из выражений под модулями на полученных интервалах. (Порядок следования знаков совпадает с порядком следования соответствующих модулей в уравнении.)



Таким образом, нам нужно рассмотреть четыре случая — когда x находится в каждом из интервалов.

Случай 1: x ≥ 3. Все модули снимаются «с плюсом»:

https://latex.codecogs.com/png.latex?\,&space;\\&space;x-1-2(x-2)+3(x-3)=4,\\&space;x=5.

Полученное значение x = 5 удовлетворяет условию x ≥ 3 и потому является корнем исходного уравнения.

Случай 2: 2 ≤ x ≤ 3. Последний модуль теперь снимается «с минусом»:

https://latex.codecogs.com/png.latex?\,&space;\\&space;x-1-2(x-2)+3(3-x)=4,\\&space;x=2.

Полученное значение x также годится — оно принадлежит рассматриваемому промежутку.

Случай 3: 1 ≤ x ≤ 2. Второй и третий модули снимаются «с минусом»:

https://latex.codecogs.com/png.latex?\,&space;\\&space;x-1-2(2-x)+3(3-x)=4,\\&space;4=4.

Мы получили верное числовое равенство при любом x из рассматриваемого промежутка [1; 2] служат решениями данного уравнения.

Случай 4: x ≤ 1 ≤ 1. Второй и третий модули снимаются «с минусом»:

https://latex.codecogs.com/png.latex?\,&space;\\&space;1-x-2(2-x)+3(3-x)=4,\\&space;x=1.

Ничего нового. Мы и так знаем, что x = 1 является решением.

Ответ: [1; 2] ∪ {5}.

Модуль в модуле

13. Решим уравнение: ||3 - x| - 2x + 1| = 4x - 10.

Решение:

Начинаем с раскрытия внутреннего модуля.

1) x ≤ 3. Получаем:

https://latex.codecogs.com/png.latex?\,&space;\\&space;|3-x-2x+1|=4x-10,\\&space;|4-3x|=4x-10.

Выражение под модулем обращается в нуль при https://latex.codecogs.com/png.latex?x=\frac%7b4%7d%7b3%7d. Данная точка принадлежит рассматриваемому  
промежутку. Поэтому приходится разбирать два подслучая.

1.1) https://latex.codecogs.com/png.latex?\frac%7b4%7d%7b3%7d\leq&space;x\leq&space;3. Получаем в этом случае:

https://latex.codecogs.com/png.latex?\,&space;\\&space;3x-4=4x-10,\\&space;x=6.

Это значение x не годится, так как не принадлежит рассматриваемому промежутку.

1.2) https://latex.codecogs.com/png.latex?x\leq&space;\frac%7b4%7d%7b3%7d. Тогда:

https://latex.codecogs.com/png.latex?\,&space;\\&space;4-3x=4x-10,\\&space;x=2.

Это значение x также не годится.

Итак, при x ≤ 3 решений нет. Переходим ко второму случаю.

2) x ≥ 3. Имеем:

https://latex.codecogs.com/png.latex?\,&space;\\&space;|x-3-2x+1|=4x-10,\\&space;|x+2|=4x-10.

Здесь нам повезло: выражение x + 2 положительно в рассматриваемом промежутке! Поэтому никаких подслучаев уже не будет: модуль снимается «с плюсом»:

https://latex.codecogs.com/png.latex?\,&space;\\&space;x+2=4x-10,\\&space;x=4.

Это значение x находится в рассматриваемом промежутке и потому является корнем исходного уравнения.

Ответ: 4.

Так решаются все задачи данного типа — раскрываем вложенные модули по очереди, начиная с внутреннего.

Мы рассмотрели все основные типы уравнений с модулями.

**НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ**

Если вы научились решать [уравнения с модулями](https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/uravneniya-i-neravenstva-s-modulem/) – значит, сможете справиться и с неравенствами.

**1.** 2|x − 4| + |3x + 5| ≥ 16.

1) x ≥ 4. Имеем:

https://latex.codecogs.com/png.latex?\,&space;\\&space;2(x-4)+3x+5\geq&space;16,\\&space;x\geq&space;\frac%7b19%7d%7b5%7d.

Полученное неравенство выполняется при всех рассматриваемых x ≥ 4. Иными словами, все числа из промежутка [4; +∞) являются решениями нашего неравенства.

2) https://latex.codecogs.com/png.latex?-\frac%7b5%7d%7b3%7d\leq&space;x\leq&space;4. Имеем в данном случае:

https://latex.codecogs.com/png.latex?\,&space;\\&space;2(4-x)+3x+5\geq&space;16,\\&space;x\geq&space;3.

Учитывая, в каком промежутке мы сейчас находимся, получаем в качестве решений исходного неравенства множество [3; 4].

3) https://latex.codecogs.com/png.latex?x\leq&space;-\frac%7b5%7d%7b3%7d. Имеем:

https://latex.codecogs.com/png.latex?\,&space;\\&space;2(4-x)-3x-5\geq&space;16,\\&space;x\leq&space;-\frac%7b13%7d%7b5%7d

Так как − https://latex.codecogs.com/png.latex?-\frac%7b13%7d%7b5%7d%3C-\frac%7b5%7d%7b3%7d, то все значения x из полученного промежутка https://latex.codecogs.com/png.latex?\left&space;(-\infty&space;,&space;-\frac%7b13%7d%7b5%7d&space;\right&space;%5d служат решениями исходного неравенства.

Остаётся объединить множества решений, полученные в трёх рассмотренных случаях.

Ответ: https://latex.codecogs.com/png.latex?\left&space;(&space;-\infty&space;,-\frac%7b13%7d%7b5%7d&space;\right&space;%5d\cup&space;\left&space;%5b&space;3;+\infty&space;\right&space;)

**2.** |x2 − 2x − 3| < 3x − 3.

Заметим, что метод интервалов здесь проходит весьма безболезненно по той причине, что корни квадратного трёхчлена под модулем — целые числа. А если дискриминант не будет точным квадратом? Замените, например, под модулем −3 на −5. Объём вычислительной работы тогда существенно возрастёт.

Я покажу вам другой способ решения этой задачи, не зависящий от капризов дискриминанта.

Наше неравенство имеет вид |A| < B. Очевидны следующие утверждения.

• Если B ≤ 0, то неравенство не имеет решений.

• Если B > 0, то неравенство равносильно двойному неравенству −B < A < B или, что то же самое, системе

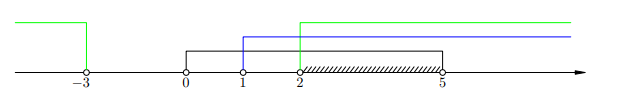
https://latex.codecogs.com/png.latex?\left\%7b\begin%7bmatrix%7d&space;A%3CB,\\&space;A%3E-B.&space;\end%7bmatrix%7d\right.

Иными словами, мы берём пересечение множества решений данной системы с множеством решений неравенства B > 0, то есть решаем систему



В нашей задаче получаем:

Изобразим множества решений этих неравенств на рисунке. Чёрным цветом показаны решения первого (двойного) неравенства; зелёный цвет — решения совокупности; синий цвет — решения последнего неравенства системы.



Решением системы служит пересечение этих множеств, т. е. множество, над которым присутствуют линии всех трёх цветов. Оно заштриховано.

Ответ: (2; 5).