**Занятие 2. Уравнения и неравенства с модулем**

**УРАВНЕНИЯ С МОДУЛЕМ**

Если на олимпиаде или экзамене вам попадётся уравнение с модулем, его можно решить, вообще не зная никаких специальных методов и пользуясь только определением модуля. Правда, занять это может часа полтора драгоценного времени.

Поэтому я сегодня хочу рассказать вам о приёмах, упрощающих решение таких задач.

Прежде всего, вспомним определение модуля.



Если число x неотрицательное, то модуль x равен самому числу x.

А для отрицательного числа x модуль равен противоположному ему положительному числу -x.

**Рассмотрим различные типы *уравнений с модулем.***

*Начнем с простых заданий.*

Слева модуль, справа число

Это самый простой случай. Нам поможет геометрический смысл модуля.

Модуль числа — это расстояние от нуля до данного числа. Очевидно, расстояние не может быть отрицательным. Оно или положительно, или равно нулю. Например, . Другими словами, расстояние от точки -2 до нуля равно 2. Этим мы пользуемся при решении уравнений.

1. Решим уравнение 

Решение:

На числовой прямой есть ровно две точки, расстояние от которых до нуля равно двум. Это точки 2 и -2. Значит, у уравнения  есть два решения:  и .

Ответ: -2; 2.

2. Решите уравнение:  Ответ: 

3. Решите уравнение: 

Решение: Мы получили совокупность двух квадратных уравнений. А затем решили отдельно каждое из них.

Вот что мы делали, решая квадратные уравнения:

 — применили теорему Виета и нашли корни.

 корней нет.

Ответ: 

4. Решим уравнение 

Решение:

Задача похожа на предыдущую.

Есть только два числа, модули которых равны четырём. Это 4 и −4. Следовательно, уравнение равносильно совокупности двух простых:

 или 

Второе уравнение не имеет корней. Решения первого: x = 0 и x = 5.

Ответ: 0; 5.

*Слева модуль, справа выражение, зависящее от переменной*

Здесь приходится раскрывать модуль по определению. . . или соображать!

5. 

Решение:

Уравнение распадается на два случая, в зависимости от знака выражения под модулем.

Другими словами, оно равносильно совокупности двух систем:

    

Решение первой системы: . У второй системы решений нет.
Ответ: 1.

6. Решите уравнение  = x. Если уравнение имеет несколько корней, в ответе запишите меньший корень

Решение:

ОДЗ уравнения: x≠3. Так как в левой части уравнения — неотрицательная величина, должно также выполняться условие  Возведем обе части уравнения в квадрат

= x

 (разность квадратов),









Так как  это посторонний корень. Уравнение имеет два корня:  или  Меньший корень: 1.

Ответ: 1

8. 

Решение:

Снимать модуль по определению? Страшно даже подумать об этом, ведь дискриминант — не полный квадрат.

Давайте воспользуемся следующим правилом:

Уравнение вида  равносильно совокупности двух систем:

    

То же самое, но немного по-другому:



Иными словами, мы решаем два уравнения, A = B и A = −B, а потом отбираем корни, удовлетворяющие условию 

Приступаем. Сначала решаем первое уравнение:





Затем решаем второе уравнение:



Теперь в каждом случае проверяем знак правой части:

Подходят только  и .

Ответ: 

*Квадратные уравнения с заменой *

Замена переменной — универсальный способ решения всевозможных уравнений. И этот способ помогает нам решать квадратные уравнения, содержащие переменную под знаком модуля.

10. Решим уравнение: 

Решение:

Поскольку , удобно сделать замену |x| = t. Получаем:

 

Ответ: ±1.

*Модуль равен модулю*

Речь идёт об уравнениях вида  Это — подарок судьбы. Никаких раскрытий модуля по определению! Всё просто:



Как мы получили это равенство? Покажем на примере задачи.

8. Решите уравнение: 

Решение:

Возведем обе части в квадрат, поскольку они неотрицательны.



Перенесем все в левую часть и воспользуемся формулой разности квадратов





Ответ: 

11. Решим уравнение: .

Решение:

Уравнение равносильно следующей совокупности:



Решим каждое из уравнений совокупности и запишем ответ.

1) 



 — корни первого квадратного уравнения.

2) 



   - корни второго квадратного уравнения.

В ответ запишем все 4 корня.

Ответ: 

Два или несколько модулей

12. Решим уравнение: 

Решение:

Не будем возиться с каждым модулем по отдельности и раскрывать его по определению — слишком много получится вариантов. Существует более рациональный способ — метод интервалов.

Выражения под модулями обращаются в нуль в точках x = 1, x = 2 и x = 3. Эти точки делят числовую прямую на четыре промежутка (интервала). Отметим на числовой прямой эти точки и расставим знаки для каждого из выражений под модулями на полученных интервалах. (Порядок следования знаков совпадает с порядком следования соответствующих модулей в уравнении.)



Таким образом, нам нужно рассмотреть четыре случая — когда x находится в каждом из интервалов.

Случай 1: x ≥ 3. Все модули снимаются «с плюсом»:



Полученное значение x = 5 удовлетворяет условию x ≥ 3 и потому является корнем исходного уравнения.

Случай 2: 2 ≤ x ≤ 3. Последний модуль теперь снимается «с минусом»:



Полученное значение x также годится — оно принадлежит рассматриваемому промежутку.

Случай 3: 1 ≤ x ≤ 2. Второй и третий модули снимаются «с минусом»:



Мы получили верное числовое равенство при любом x из рассматриваемого промежутка [1; 2] служат решениями данного уравнения.

Случай 4: x ≤ 1 ≤ 1. Второй и третий модули снимаются «с минусом»:



Ничего нового. Мы и так знаем, что x = 1 является решением.

Ответ: [1; 2] ∪ {5}.

Модуль в модуле

13. Решим уравнение: 

Решение:

Начинаем с раскрытия внутреннего модуля.

1) x ≤ 3. Получаем:



Выражение под модулем обращается в нуль при . Данная точка принадлежит рассматриваемому
промежутку. Поэтому приходится разбирать два подслучая.

1.1)  Получаем в этом случае:



Это значение x не годится, так как не принадлежит рассматриваемому промежутку.

1.2) . Тогда:



Это значение x также не годится.

Итак, при x ≤ 3 решений нет. Переходим ко второму случаю.

2) x ≥ 3. Имеем:



Здесь нам повезло: выражение x + 2 положительно в рассматриваемом промежутке! Поэтому никаких подслучаев уже не будет: модуль снимается «с плюсом»:



Это значение x находится в рассматриваемом промежутке и потому является корнем исходного уравнения.

Ответ: 4.

Так решаются все задачи данного типа — раскрываем вложенные модули по очереди, начиная с внутреннего.

Мы рассмотрели все основные типы уравнений с модулями.

**НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ**

Если вы научились решать [уравнения с модулями](https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/uravneniya-i-neravenstva-s-modulem/) – значит, сможете справиться и с неравенствами.

**1.** 2|x − 4| + |3x + 5| ≥ 16.

1) x ≥ 4. Имеем:



Полученное неравенство выполняется при всех рассматриваемых x ≥ 4. Иными словами, все числа из промежутка [4; +∞) являются решениями нашего неравенства.

2)  Имеем в данном случае:



Учитывая, в каком промежутке мы сейчас находимся, получаем в качестве решений исходного неравенства множество [3; 4].

3) . Имеем:



Так как − , то все значения x из полученного промежутка  служат решениями исходного неравенства.

Остаётся объединить множества решений, полученные в трёх рассмотренных случаях.

Ответ: 

**2.** |x2 − 2x − 3| < 3x − 3.

Заметим, что метод интервалов здесь проходит весьма безболезненно по той причине, что корни квадратного трёхчлена под модулем — целые числа. А если дискриминант не будет точным квадратом? Замените, например, под модулем −3 на −5. Объём вычислительной работы тогда существенно возрастёт.

Я покажу вам другой способ решения этой задачи, не зависящий от капризов дискриминанта.

Наше неравенство имеет вид |A| < B. Очевидны следующие утверждения.

• Если B ≤ 0, то неравенство не имеет решений.

• Если B > 0, то неравенство равносильно двойному неравенству −B < A < B или, что то же самое, системе



Иными словами, мы берём пересечение множества решений данной системы с множеством решений неравенства B > 0, то есть решаем систему



В нашей задаче получаем:

Изобразим множества решений этих неравенств на рисунке. Чёрным цветом показаны решения первого (двойного) неравенства; зелёный цвет — решения совокупности; синий цвет — решения последнего неравенства системы.



Решением системы служит пересечение этих множеств, т. е. множество, над которым присутствуют линии всех трёх цветов. Оно заштриховано.

Ответ: (2; 5).