**Теория чисел**

**1. Найдите целое частное и остаток от деления 19 на 3;-18 на 5; n3+2n-l на *n,* где *n* є N; *12n5* + *10n4* + 2 на 2n, где *n* є N.**

**Решение.** Легко убедиться в том, что: 19 = 3 · 6 + 1, причем 6, 1 є Z, и 0~ 1 < 3; -18 = 5·(-4)+2, причем -4,2 є Z, и 0~2<5; *n3+2n-1* = n·(n2+1)+(n-1), причем *n2+1, n-1* є Z, и 0~ *n-1* < *n.* Аналогично, l2n5 + *10n2* + 2 = 2n · *(6n4* + 5n) + 2, где *6n4* + *5n,* 2 є Z, однако ограничение 0 ~ 2 < *2n* имеет место лишь для *n* ~ 2. Для *n* = 1 искомое равенство принимает вид *12n5* + *l0n4* + 2 = = 2n · *(6n4* + *5n3* + 2) +0, то есть вид 24 = 2 · 12 +0.

**2. Докажите, что любое целое число представимо в виде *5k,* или *5k* ± 1, или *5k* ± 2, *k* є Z, причем данное представление единственно.**

**Решение.** Рассмотрим произвольное целое число *z* и разделим его с остатком на *5.* По теореме о делении с остатком, имеет место соотношение *z* = *5q* + *r,* где *q, r* є Z, и 0 ~ *r* < 5. Другими словами, *r* Е {0, 1, 2, 3, 4}. Если *r* =0, то *z* = *5q* +0, то есть, взяв *k* = *q,* мы можем представить *z* в виде *5k, k* Е Z. Если *r* = 1, то *z* = *5q* + 1, то есть, взяв *k* = *q,* мы можем представить *z* в виде *5k* + 1, *k* є Z. Если *r* = 2, то *z* = *5q* + 2, то есть, взяв *k* = *q,* мы можем представить *z* в виде *5k* + 2, *k* Е Z. Если *r* = 3, то *z* = *5q* + 3, или, что то же, *z* = 5(q + 1) - 2, то есть, взяв *k* = *q* + 1, мы можем представить *z* в виде *5k* - 2, *k* є Z. Если *r* = 4, то *z* = *5q* + 4, или, что то же, *z* = 5(q + 1) - 1, то есть, взяв *k* = *q* + 1, мы можем представить *z* в виде *5k* - 1, *k* є Z. Единственность полученного представления числа *z* следует из единственности представления числа *z* в виде *z* = *5q* + *r,* где *q, r* є Z, и 0~ *r* < 5.

Замечание. В ходе рассуждений мы показали, что любое целое число представимо в виде *5k,* или *5k* + 1, или *5k* + 2, или *5k* + З, или *5k* + 4, *k* є Z, причем указанное представление единственно. Этот факт немедленно следует из теоремы о делении с остатком.

**3.Докажите, что сумма четных степеней трех последовательных целых чисел не может равняться четной степени целого числа.**

**Решение.** Прежде всего заметим, что четная степень любого целого числа на может иметь вид *3k* + 2, *k* є Z. Для доказательства этого факта достаточно представить произвольное целое число *z* в виде *3k* или *3k* ± 1, *k* є Z, и убедиться, что rest(02m, 3) =0, а rest((±1)2m, 3) = 1, то есть число *z 2m* имеет вид *3q* или *3q* + 1, *q* є Z. Далее, рассмотрим три последовательных целых числа *z, z* + 1 и *z* + 2. Легко убедиться в том, что они имеют различные остатки при делении на 3, то есть одно из указанных чисел имеет вид *3k,* второе - вид *3k* + 1, а третье - вид *3k* - 1, *k* є Z: действительно, если *z* = *3t, t* є Z, то *z* + 1 = *3t* + 1, а *z* + 2 = *3(t* + 1) - 1; если *z* = *3t* + 1, *t* є Z, то *z* + 1 = *3(t* + 1) - 1, а *z* + 2 = *3(t* + 1); если *z* = *3t* - 1, *t* є Z, то *z* + 1 = *3t,* а *z* + 2 = *3t* + 1. Следовательно, при возведении трех указанных чисел в четные степени мы получим три целых числа, одно из которых имеет вид *31,* второе - вид *3q* + 1, а третье - вид *3s* + 1, *q, l, s* є Z. Сумма полученных целых чисел имеет вид 3(1+q+в)+2, то есть дает остаток два при делении на 3, и, следовательно, не может быть четной степенью целого числа.

**НОД и НОК**

Наибольший общий делитель (а 1 , ... , an) целых чисел а1, ... , *an,* хотя бы одно из которых не равно нулю, есть наибольшее целое число, делящее каждое из чисел а1, ... , *an.* Наименьшее общее кратное [ а 1 , ... , an] целых чисел а1, ... , *an,* каждое из которых не равно нулю, есть наименьшее натуральное число, делящееся на каждое из чисел а1, ... , *an.* Например, (4, -6) = 2, так как множество общих делителей чисел 4 и -6 имеет вид {-2, -1, 1, 2}, и его наибольший элемен:r равен 2. Аналогично, (4, -6] = 12, так как множество общих кратных чисел 4 и -6 имеет вид { ... , -36, -24, -12, 12, 24, 36, ... }, и его наименьший натуральный элемент равен 12.

**4. Натуральные числа a, b и c таковы, что НОК (a, b) = 60 и НОК (а, с) = 270 (НОК (х, у) - наименьшее общее кратное чисел (х и у). Найти НОК (b, c).**

Решение:

Из того, что НОК (a, b) = 60 = 22 · 3 · 5 и НОК (а, с) = 270 = 2 · 33 · 5, делаем вывод о том, что число b кратно 22, и число с кратно 33 (так как а не кратно ни 22, ни 33). Тогда искомое число НОК (b, c) делится на 22 · 33 и, в то же время, само является делителем числа НОК (60, 270) = 22 · 33 · 5. Поэтому оно равно либо 22 · 33 · 5 = 540, либо 22 · 33 = 108. Первое из этих значений получается при а = 1, b = 22 · 3 · 5, c = 2 · 33 · 5, а второе - при а = 5, b = 22 · 3, c = 2 · 33, причём все это удовлетворяет условиям задачи.

Ответ: 540, 108.

**5. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел: 15, -12, 3.**

**Решение.** Рассматривая множества {±1, ±3, ±5, ±15}, {±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12} и {±1, ±3} делителей чисел 15, -12 и 3, соответственно, мы убеждаемся в том, что наибольший общий делитель указанных чисел равен 3. Рассматривая множества {±15, ±30, ±45, ±60, ... }, {±12, ±24, ±36, ±48, ±60, ... } и {±3, ±6, ±9, ... , ±60, ... } кратных чисел 15, -12 и 3, соответственно, мы убеждаемся в том, что наименьшее общее кратное указанных чисел равно 60.

**6. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 1500, -1224, -1440.**

**Решение.** Для решения задачи разложим каждое из чисел 1500, 1224 и 1440 на простые множители. Легко убедиться в том, что 1500 = = 22 • 3 · 53 , 1224 = 23 • 32 • 17, и 1440 = 25 • 32 • 5. Другими словами, (1500, -1224, -1440) = (1500, 1224, 1440) = (22-3 1·53.!7°, 23-32-5°-171, 25 • 32 • 51 • 17°). Выбирая минимальные значения показателей входящих в разложения простых чисел, мы получим, что (1500, -1224, -1440) = = 22 • 3 1 ·50.17° = 22 • 3 = 12. Аналогично, [1500, -1224, -1440) = · = [22 .3 1 .53 ·17°, 23 • 32 .5о·17 1 , *25* ·32 ·51 ·17°], и, выбирая минимальные значения показателей входящих в разложения простых чисел, мы получим, что [1500, -1224, -1440) = *25* • 32 • 53 • 171 = 612 000.

**Алгоритм Евклида**

Например, алгоритм Евклида для чисел 1071 и 1029 имеет вид 1071 = = 1029 · 1 + 42, 1029 = 42 · 24 + 21, 42 = 21 · 2 +0, и мы получаем, что (1071, 1029) = 21.

**7. Пользуясь алгоритмом Евклида, найдите (663, 126).**

**Решение.** Следуя описанному выше алгоритму, получаем: 663 = 126· . *5* + 33, 126 = 33. 3 + 27' 33 = 27. 1+6, 27 = 6. 4 + 3, 6 = 3. 2 +о, причем 0 < 3 < 22 < 27 < 49. Таким образом, последний ненулевой остаток алгоритма Евклида равен 3, откуда следует, что (213, 49) = 3. Заметим, что в данном случае наибольший общий делитель можно найти и с помощью разложения каждого из чисел на простые множители: (663, 126) = (3 · 13 · 17, 2 · 32 · 7) = 3.

**8. При любом натуральном n найдите наибольший общий делитель чисел: 6n4 + n2 + 3n и 2n3 + 1; 6n6 + 10n5 + 4n3 +n и 3n3 + 5n2 + 2.**

Решение. В первом случае, следуя алгоритму Евклида, получаем: 6n4 + n2 + 3n = (2n3 + 1) · (3n) + n2 , 2n3 + 1 = n2 • (2n) + 1, и n2 = l · n2 +0. таким образом, последний ненулевой остаток алгоритма Евклида равен 1, и (6n4 + n2 + 3, 2n3 + 1) = 1 при любом натуральном п. Во втором случае, следуя алгоритму Евклида, получаем: 6n6 + 10n5 + 4n3 + n = (3n3 + 5n2 + 2) · (2n3 ) + n, Зn3 + 5п2 + 2 = п. (Зn2 + 5п) + 2. Далее, п = 2 · *k* + *r,* где *r* є {0, 1}. При *r* =0, то есть в случае п = *2k,* последний ненулевой остаток алгоритма Евклида равен 2, то есть (6n6+10n5+4n3+n, 3n3+5n2+2) = 2 при четных п. При *r* = 1, то есть в случае п = *2k* + 1, следующий шаг алгоритма имеет вид 2 = 1 ·2+0, и последний ненулевой остаток алгоритма Евклида равен 1, то есть (6n6+ 10n5+4n3 *+n,* 3п3 +5n2+2) = 1 в случае нечетного *n.*

**Теорема Ферма**

Исходная

Если *p* – это простое число, *a* – целое число, не делящееся на *p*, то *ap-1 – 1*  делится на *p*.

Формально пишется так: ***ap-1 ≡ 1* (mod *p*)**.

*Примечание:* простым называется натуральное число, которое делится без остатка только на единицу и само себя.

***Например:***

* *a* = 2
* *p* = 5
* *ap-1 – 1 = 25-1 – 1 = 24 – 1 = 16 – 1 = 15*
* число *15* делится на *5* без остатка.

|  |  |
| --- | --- |
| **9.Для каких *n* число  *n*2001 – *n*4  делится на 11?**  **Решение**  Согласно малой теореме Ферма  *n*2001 – *n*4 ≡ *n* – *n*4 = *n*(1 – *n*)(*n*² + *n* + 1) (mod 11).  *n*² + *n* + 1 ≡ *n*² – 10*n* + 25 – 2 = (*n* – 5)² – 2 (mod 11).  Перебор остатков показывает, что квадрат не может давать остатка 2 при делении на 11.  **Ответ**  Для  *n* ≡ 0, 1 (mod 11).  **10. Решить в целых числах уравнение**  **3n − 4m = 2.**  Решение. Поскольку НОД(3, 4) = 1, НОД(3, 4, 2) = 1, то данное уравнение, согласно приведенному выше утверждению, имеет решение. Очевидно, что n = 2, m = 1 – решение данного уравнения, то есть имеем  тождество 3·2−4·1 = 2. Вычитая их исходного уравнения последнее тождество, получаем 3(n−2)−4(m −1) = 0, откуда следует m −1 = 3  4(n−2).  Для целочисленности m необходимо и достаточно, чтобы n−2  4 = t, t ∈ Z,  то есть n − 2 = 4t, n = 2 + 4t, t ∈ Z, и тогда m = 1 + 3t, t ∈ Z. В итоге  имеем: m = 1 + 3t, n = 2 + 4t, t ∈ Z.  Ответ: (2 + 4t; 1 + 3t), t ∈ Z. |  |
|  |  |