**Задачи на игры и стратегии**

**Основные методы решения игровых задач**

Для решения игровой задачи нужно уметь правильно записать его. И эта запись зависит от того, кто выигрывает в данной игре. Поэтому сначала рассмотрим общие правила записи решения игровых задач. Так как же правильно записать решение игровой задачи?

Вообще го­воря, это зависит от того, кто выиграет, так как у начинающего есть воз­можность сделать первый ход, который не зависит от хода соперника.

***Итак, если выиграет первый, тогда в решении игровой задачи нужно записать:***

I) его первый ход;

II) алгоритм его ходов в ответ на каждый ход соперника, т. е. стра­тегию победы;

III) показать, что у него найдется независимо от хода соперника возможность сделать ход, т. е. его последний ход будет победным.

***Если же выиграет второй, тогда в решение нужно записать:***

I) алгоритм его ходов в ответ на каждый ход соперника, т. е. стра­тегию победы;

II) показать, что у него найдется независимо от хода соперника возможность сделать ход.

Иногда, бывает нужно записать еще и последний ход, который мо­жет не вписываться в общую стратегию.

Теперь рассмотрим вопрос о поиске решения задачи. Обычно рассматриваются задачи, в которых один из соперников может предложить выигрышный алгоритм, т. е. обычно предлагаются результативные игры.

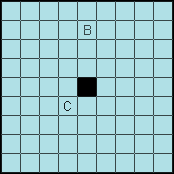
В своей работе я рассмотрел следующие идеи стратегий:

* Игры, использующие симметрию.
* Игры, в которых стратегия — дополнение до фиксированного числа.
* Игры, использующие метод выигрышных позиций
* Игры-шутки.

Остановимся на каждой идее более подробно.

**Игры, использующие симметрию**

Сейчас мы познакомимся с мощным и красивым, но очень простым методом решения игровых задач - симметричной стратегией. Суть его - делать каждый раз ход, симметричный ходу противника или дополняющий его до чего-либо. Доказательство правильности нашей стратегии будет пользоваться тем, что после каждого нашего хода позиция симметрична: раз так, то если противник сумел сделать свой ход, то *и мы сможем* сделать ход, симметричный ему. Неправильно думать что симметрии - стратегия только для второго игрока. Если *исходная* позиция - *несимметрична*, то обычно первый игрок может ее как-то сделать симметричной, а потом играть по симметрии, отвечая на ходы второго.

**Задача 1:** Соты имеют форму квадрата 9×9. Все квадратики, кроме центрального, заполнены мёдом. В центре — дёготь. За один ход разрешено разломить соты вдоль любой вертикальной или горизонтальной линии и съесть ту часть, где нет дёгтя. Проигрывает тот, кому остался только дёготь. Кто выиграет при правильной игре?

**Игры, в которых стратегия — дополнение до фиксированного числа**

Другая идея выигрышной стратегии в играх — дополнение хода соперника до некоторого фиксированного числа, уменьшая каждым «совместным» ходом (т. е. ход первого и второго игрока) общее число элементов на некоторое постоянное число, что сводит игру к игре с меньшим числом элементов, т. е. более простой. Понятно, что победа в данной стратегии зависит от общего количества данных по условию элементов.

**Задача 2:** На столе лежат 15 карандашей. Двое берут по очереди один, два или три карандаша. Проигрывает тот, кому достанется взять последний карандаш. Как должен играть начинающий, чтобы заставить своего противника взять последний карандаш?

**Решение:** Остаток от деления числа 15 на 3 + 1 = 4 равен 3. Начинающему надо, добиться того, чтобы последний карандаш взял противник, поэтому первым ходом он должен взять не 3 карандаша (остаток от деления), а 2 (1 карандаш – противнику!) Затем каждым последующим ходом будет дополнять количество карандашей, взятых вторым игроком, до 4.

После первого хода 1 -го игрока на столе останется 13 карандашей, после второго хода — 9, после третьего — 5, после четвертого — 1. Следовательно, последний карандаш берет второй игрок.

**Метод выигрышных позиций**

Бесспорно, самый мощный и универсальный способ решения задач на игры - поиск выигрышных позиций. Здесь мы будем называть выигрышной ту позицию, которую выгодно *оставлять после* своего хода, а проигрышной, соответственно, ту, которую невыгодно (в согласии с одной половиной методической литературы и в противоположность другой половине :-) Тогда *финальная позиция*, из которой уже нельзя сделать ход - *выигрышная*. Основные свойства позиций таковы:  
1.) каждая позиция - либо выигрышная, либо проигрышная (промежуточных вариантов нет!);  
2.) из *выигрышной* позиции можно пойти *только на проигрышную*;  
3.) из любой *проигрышной* позиции *можно* пойти *на выигрышную*.  
Тогда, если начальная позиция - проигрышная, выигрывает первый, если выигрышная - второй. Стратегия одинакова: каждый раз ходить на выигрышную позицию. Тогда противник должен будет походить на проигрышную позицию (свойство 2), а мы опять сможем пойти на выигрышную (свойство 3).

Суть метода: делим всю доску (или все возможные ходы) на два вида полей — выигрываю­щие и проигрывающие (причем под это определение попадают все рассматриваемые клетки или ходы). После этого стратегия играющего заключается в том, чтобы делать свой ход на выигрывающие клетки (или делать выигрывающие ходы). Данный метод пригоден почти для всех игровых задач.

Рассмотрим применение данного метода на конкретной задаче.

**Задача 3:** Имеются две кучки конфет: в одной — 20, в другой — 21. За ход нужно съесть все конфеты в одной из кучек, а вторую разделить на две необязательно равные кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

**Решение:**Если мы решили использовать метод выигрышных пози­ций, то нам нужно найти эти выигрышные позиции. Чтобы их найти, рассмотрим простейшие случаи.

Простейшая выигрышная позиция для того игрока, кто ее создал (т. е. «сходил» последним): это 1 и 1. Понятно, что в этом случае побе­ждает тот, кто ходит вторым, так как у первого игрока нет хода.

Очевидно, что позиция 2 и 1 выигрышная для первого и проигрыш­ная для второго.

Если 3 и 1, тогда второй вновь с победой, как несложно убедиться простой проверкой, так как есть ровно два хода.

Когда в кучках 3 и 2, победа у первого (убираем 3, делим 2).

Если же 3 и 3, тогда победа вновь возвращается ко второму, что можно показать простым перебором и т. д.

Замечаем закономерность: если в каждой из кучек по нечетному числу конфет, тогда позиция выигрышная для второго.

Если же хотя бы в одной из кучек четное число конфет, то такая позиция выигрышная для первого.

Несложно понять, что когда в обеих кучках по нечетному числу конфет, то за один ход нельзя получить такую же позицию, так как при разделении любого нечетного числа на два слагаемых одно из них будет четным. Однако если хотя бы в одной из кучек четное (ненулевое) чис­ло конфет, то ее несложно разбить на два нечетных слагаемых. Таким образом мы можем разбить все позиции на выигрышные и проигрыш­ные с учетом того, сколько конфет в кучках. И задача выигрывающего делать ход на выигрышные позиции.

После этого уже понятно, кто выиграет в данной по условию игре и как ему этого добиться.

Делим все возможные ходы на «выигрышные» и «проигрышные». Если после разбиения получились две кучки с нечетным числом кон­фет, тогда назовем такую позицию «выигрышной», а все остальные — «проигрышные».

Стратегия победителя заключается в том, что он делает ход на «вы­игрышные» поля. Так как первый может сделать ход на «выигрышное» поле, а хода с одного «выигрышного» поля на другое нет, и с любого «проигрышного» поля за один ход можно попасть на «выигрышное», то побеждает начинающий. Своим первым ходом он может съест куч­ку из 21 конфеты, а кучу с 20 конфетами разделить на две, в которых нечетное количество конфет в обеих кучках (например, 19 и 1). За­метим, что последняя позиция, когда две кучки, по одной конфете в каждой, выигрышная, т. е. последний ход сделает первый.

**Игры-шутки**

Самый первый и простой класс игр - игры-шутки, в которых, на самом деле, нет никакой стратегии (а нас хотят обмануть, что она якобы есть!). Просто... как бы кто ни ходил, либо всегда выиграет первый игрок (тот, кто начинает игру), либо всегда второй. Задача - в том, чтобы математически доказать такую закономерность (а заметить ее можно, сыграв самому с собой раза 3-4). Для доказательства обычно находится какая-то величина, которая понятно чему равна в начале и конце и понятно как изменяется на каждом ходу - тут даже частенько число ходов до конца однозначно посчитать можно. Либо какой-то *инвариант* (т.е. что-то, не меняющееся ни при какой ходе), однозначно зависящий от начальной позиции (чаще всего - от четности) и определяющий выигравшего в конце.

Отметим, что часто для нахождения идеи решения задачи можно использовать «метод маленьких чисел», т. е. начинать поиск решения с небольших чисел, который мы уже упоминали в предыдущих разделах.

**Задача 4:** Двое по очереди ломают шоколадку 5x8. За ход можно разломать любой кусок по прямой линии между дольками. Проигрывает тот, кто не может сделать ход (И это такое стандартное условие, что мы его будем подразумевать, если не сказано обратное. Вопрос "кто выиграет при правильной игре?" тоже подразумевается).

**Решение:** Что значит, что игра закончилась? Конечно, что шоколадка уже вся разломана на отдельные дольки. Долек *всегда* будет 5x8=40 штук, а шоколадка в начале была одна. Заметим, что на каждом ходу один кусок шоколадки всегда разламывается на 2, т.е. *количество различных кусков* шоколадки увеличивается на 1. В начале это кол-во было равно 1, а в конце, как мы заметили, 40. Значит, игра продолжалась *ровно 39* ходов ("ходом" мы называем ход *одного* игрока, а не пару "ход - ответный ход"). Поэтому последний (39-й) ход был обязательно ходом первого (его ходы - первый, третий и все с нечетными номерами) - и первый выиграл.  
Вот такая получилась шутка - как ни ходи, первый всегда выигрывает).

**Задачи для самостоятельного решения**

1. Имеется две кучки камней — по 7 в каждой. За ход можно взять любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?
2. Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол так, чтобы они не накладывались друг на друга и не выступали за край стола. Про­игрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?
3. Двое играют в игру. Ходы, которые делаются по очереди, заклю­чаются в том, что из кучки в 50 камней убирается любое число камней от 1 до 5. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень. Кто выиграет в данной игре?
4. В ряд расположены 12 клеток. На самой правой клетке стоит белая фишка, на самой левой — чёрная. Два игрока по очереди передвигают свою фишку на одно поле — вперёд или назад. (Пропустить ход нельзя.) Проигравшим считают того, у кого нет хода. Кто выигрывает: начинающий или его партнёр?
5. Имеется три кучки камней: в первой - 10, во второй - 15, в третьей - 20. За ход можно разбить любую кучку на две меньшие. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

**Ответы**

**1.**Имеется две кучки камней — по 7 в каждой. За ход можно взять любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

*Решение.* Сначала опять используем метод малых задач.

Начнем игру с двух кучек, в каждой из которых по одному камню. Тогда, понятно, что первый проигрывает.

Если мы добавим в одну из кучек еще один камень, тогда понятно, что победит начинающий: он первым своим ходом возьмет из кучки, где два камня, один камень и получит позицию, которая получилась в рассмотренном выше случае, только сейчас он уже второй.

Если в кучках 3 и 1 камень, тогда вновь побеждает игрок, начинаю­щий игру: он уравнивает число камней в кучках, т. е. берет два камня и получает, что число камней в кучках будет 1 и 1. И эта позиция, как уже рассматривалось выше, выигрышная для него.

Если число камней в кучках по 2, тогда вновь проигрывает начи­нающий: на любой его ход, противника может взять такое же число камней из другой кучки, которую первый игрок не тронул.

Сейчас несложно понять, как действовать игроку, делающему вто­рой ход, чтобы победить в данной игре: он должен делать точно такие же ходы, как и первый, но только убирать камни он должен из той кучки, которую не тронул последним ходом его противник.

Как несложно понять, у победителя всегда есть ход после хода про­тивника.

Несложно понять и общую стратегию выигрывающего, когда в куч­ках произвольное число камней:

* если число камней в кучках равное, то необходимо уравнивать число камней в кучках после хода начинающего, выполняя симметричные ходы. Выигрывает второй игрок.
* если же число камней в кучках неравное, тогда начинающий своим ходом уравнивает число камней в кучках и далее действует так же как, как и в первом случае. Здесь побеждает игрок, делающий первый ход.

В данной игре симметрия несколько необычная — вроде бы и не симметрия вовсе, однако, равенство камней в кучках, и «одинаковые» ходы, проводимые игроками очень ее напоминают.

1. Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол так, чтобы они не накладывались друг на друга и не выступали за край стола. Про­игрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

*Решение.* Нам нужно найти такую последовательность ходов, которая позволила бы, глядя на ходы сопер­ника, делать ходы, которые привели бы к победе. Как же ходить после хода соперника? Стол круглый, поэтому первый ход так и просится — положить пятак в центр доски. А дальше? А дальше — по симметрии, относительно центра стола! И понятно, что первый выиграет.

Можно отметить, что если доска обладает центром симметрии (и не обязательно круглая), тогда первый сможет выиграть на ней действуя аналогичным образом: ставя свою фишку или монету в центр стола, а затем используя центральную симметрию.

1. Двое играют в игру. Ходы, которые делаются по очереди, заклю­чаются в том, что из кучки в 50 камней убирается любое число камней от 1 до 5. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень. Кто выиграет в данной игре?

*Решение.* И опять выработку стратегии лучше начинать с небольшого числа камеш­ков. Понятно, что если в нашей кучке меньше шести камней, тогда выиграет первый игрок: он первым своим ходом заберет все камни.

Если бы в нашей кучке было 6 камешков, тогда понятно, что второй выиграет, так как он забрал бы все оставшиеся камни после первого хода начинающего.

Если камней семь? Что делать тогда первому? Ему нужно забрать один камень и свести задачу к предыдущему случаю. Аналогично надо выработать стратегию игры и для 7, 8, 9,10,11 камней.

Когда камней 12, то понятно, что выиграет второй: как бы первый не ходил, он своим ходом может взять такое количество камней, чтобы осталось ровно 6. А в этом случае он выигрывает, как мы уже разобрали.

Итак, если число камней делится на 6, то выигрывает второй, если не делится, то первый. Докажем это.

Пусть у нас 6*t*камней. После первого хода игрока, начинающего игру, второй делает ход, после которого остается 6*t -* 6 камней, т. е. число камней в кучке уменьшилось на 6. Несложно понять, что послед­ний камень возьмет игрок, делающий второй ход, и также понятно, что у него всегда есть возможность сделать ход.

Пусть у нас *6t+a,*где 1 < *а <*5, камней. Тогда начинающий первым своим ходом убирает все, что «мешает», т. е. *а*камней, и остается всего 6*t* камней, т. е. сводит игру к рассматриваемому выше случаю, где он уже второй игрок. Значит в этом случае побеждает игрок, делающий первый ход.

В нашей задаче 50 камней. Поэтому вы­игрывает первый, беря из кучки два камня и оставляя 48 камней. Далее после его последующих ходов в кучке будет оставаться соответствен­но 42, 36, 30, 24, 18, 12, 6, 0, таким образом последний камень забирает первый игрок.

1. В ряд расположены 12 клеток. На самой правой клетке стоит белая фишка, на самой левой — чёрная. Два игрока по очереди передвигают свою фишку на одно поле — вперёд или назад. (Пропустить ход нельзя.) Проигравшим считают того, у кого нет хода. Кто выигрывает: начинающий или его партнёр?

**Ответ.** Выигрывает второй игрок.

**Указание.** Проследите за тем, как меняется чётность расстояния между фишками в процессе игры.

**Решение.** Назовём расстоянием между фишками число пустых клеток между ними. В начальном положении оно равно 10. Очевидно, после каждого хода расстояние между фишками увеличивается или уменьшается на 1, а значит, меняет чётность. Таким образом, после каждого хода первого игрока расстояние будет нечётным, то есть между фишками будет хотя бы одна клетка и у второго игрока всегда будет возможность пойти «вперёд» (в направлении фишки соперника).

**Вопрос.** Каким будет ответ в общем случае (если длина полоски — не 12, а *n* клеток)?

1. Имеется три кучки камней: в первой - 10, во второй - 15, в третьей - 20. За ход можно разбить любую кучку на две меньшие. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

*Решение.* И это задача-шутка. Количество возможных ходов для раскладывания кучек: 45 – 3 = 42. Поэтому, как бы ни ходил первый игрок, при его ходе всегда будет четное число кучек. При хо­де же второго игрока количество кучек будет всегда нечетно. Значит, победит первый игрок, так как по окончании игры всегда остается ровно 45 кучек по одному камню в каждой.