1. Найдите в последовательности 2, 6, 12, 20, 30, ... число, стоящее а) на 8-м; б) на 2021-м месте. Ответ объясните.

**Подсказка**

2 = 1.2; 6 = 2.3.

**Решение**

Можно заметить, что 2 = 1.2, 6 = 2.3, 12 = 3.4, и предположить, что *n*-й член последовательности равен *n*.(*n* + 1). Проверка на 4-м ( 20 = 4.5) и 5-м ( 30 = 5.6) членах последовательности показывает, что мы угадали. Значит, на шестом месте стоит число 8.9 = 72, а на 2021-м — 2021.2022 = 4086462.

Конечно, это не доказательство в строгом математическом смысле этого слова. Например, так можно ''доказать'', что число шестьдесят делится на все числа. Действительно, 60 делится на 1, на 2, на 3, на 4, на 5, на 6... Однако для решения задачи требуется только найти достаточно простое правило, следуя которому, можно получить такую последовательность. А умение увидеть, почувствовать закономерность (что требовалось в данной задаче) не менее важно для математика, чем умение строго рассуждать! Если вы найдёте какое-нибудь другое (но тоже ''достаточно простое'') правило, дающее последовательность 2, 6, 12, 20, 30, напишите, пожалуйста, нам (а на олимпиаде такое решение тоже было бы засчитано!).

1. В классе каждый болтун дружит хотя бы с одним молчуном. При этом болтун молчит, если в кабинете находится нечетное число его друзей – молчунов. Докажите, что учитель может пригласить на факультатив не менее половины класса так, чтобы все болтуны молчали.

**Решение**

Докажем утверждение индукцией по числу *n*учеников в классе. Для *n=*3утверждение очевидно. Предположим, что оно верно при *n N*. Пусть *n=N+*1. Утверждение верно, если в классе ровно один молчун. Пусть их не менее двух. Выделим молчуна *A*и его друзей – болтунов *B1,..,Bk*. Для оставшихся *n-*1*-k*учеников утверждение верно, т.е. можно выделить группу *M*, в которой каждый болтун дружит с нечетным числом молчунов и в *M*входит не менее **учеников. Предположим, что болтуны *B1,..,Bm*дружат с нечетным числом молчунов из *M*, а *Bm+*1*,..,Bk*– с четным числом. Тогда, если *m*, то добавим к группе *M*болтунов *B1,..,Bm*, а если *m<*, то добавим к группе *M*болтунов *Bm+*1*,..,Bk*и молчуна *A*. В обоих случаях мы получим группу учеников, удовлетворяющую условию задачи.

**3.** *n* человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трёх людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это можно сделать при любом *n*.

**Решение 1**

  Индукция по *n. База*. При  *n* < 3  конструкция очевидна.
  *Шаг индукции*. Предположим, что удалось познакомить *n* человек, так, что никакие трое из них не имеют равного числа знакомых. Присоединим (*n*+1)-го. Если среди первых *n* человек найдётся человек, знакомый со всеми остальными, то (*n*+1)-го не будем ни с кем знакомить. Если же такого нет, то познакомим (*n*+1)-го со всеми.
  В первом случае (*n*+1)-й не имеет знакомых, а каждый из остальных имеет хоть одного знакомого – того, который ранее был знаком со всеми. Во втором случае (*n*+1)-й имеет *n* знакомых, количество знакомых у каждого из первых *n* человек возросло на единицу, но ни у одного из них не стало *n* знакомых.
  На рисунке показаны схемы знакомств при  *n* ≤ 6,  получающиеся описанным способом.



**Решение 2**

  Занумеруем *n* человек числами от 1 до *n* и познакомим *i*-го с *j*-м, если  |*i – j| ≤ n*/2.  Тогда равное количество знакомых имеют только пары людей с номерами *k* и  *n – k*  (при  *k ≤ n*/2  человек с номером  *k* – 1  имеет, очевидно, на одного знакомого меньше, чем человек с номером *k*).

**4.** В плоскости проведено n прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. На сколько частей разбивают плоскость эти прямые.

Решение

С помощью элементарных рисунков легко убедится в том, что одна прямая разбивает плоскость на 2 части, две прямые – на 4 части, три прямые – на 7 частей, четыре прямые – на 11 частей.

Обозначим через N(n) число частей, на которые n прямых разбивают плоскость. Можно заметить, что

       N(1)=2,

       N(2)=N(1)+2=2+2,

       N(3)=N(2)+3=2+2+3,

       N(4)=N(3)+4=2+2+3+4.

Естественно предположить, что

       N(n)=N(n–1)+n=2+2+3+4+5+…+n,

или, как легко установить, воспользовавшись формулой суммы n первых членов арифметической прогрессии,

       N(n)=1+n(n+1)/2.

Докажем справедливость этой формулы методом математической индукции.

Для n=1 формула уже проверена.

Сделав предположение индукции, рассмотрим k+1 прямых, удовлетворяющих условию задачи. Выделим из них произвольным образом k прямых. По предположению индукции они разобьют плоскость на 1+ k(k+1)/2 частей. Оставшаяся (k+1)-я прямая разобьётся выделенными k прямыми на k+1 частей и, следовательно, пройдёт по (k+1)-й части, на которые плоскость уже была разбита, и каждую из этих частей разделит на 2 части, то есть добавится ещё k+1 часть. Итак,

       N(k+1)=N(k)+k+1=1+ k(k+1)/2+k+1=1+(k+1)(k+2)/2,

что и требовалось доказать.

**10.** n разбойников делят добычу. У каждого из них свое мнение о ценности той или иной доли добычи, и каждый из них хочет получить не меньше, чем 1/n долю добычи (со своей точки зрения). Придумайте, как разделить добычу между разбойниками.

**Подсказка**

Воспользуйтесь индукцией по числу разбойников.

**Решение**

Для двух разбойников задача решается несложно - один делит добычу на две равные по его мнению доли, а другой выбирает из них наибольшую на его взгляд долю. Будем решать задачу при помощи индукции по числу разбойников, т.е. предположим, что k разбойников уже имеют способ разделить добычу безобидно. Будем делить добычу между k+1 разбойниками. Разделим всю добычу между k разбойниками и затем пусть каждый из них разделит свою долю на k+1 равных по его мнению частей. Пусть теперь последний разбойник выберет по одной из этих частей у каждого из k разбойников. Последний разбойник взял (по его мнению) не менее, чем по 1/(k+1) доле у каждого из k разбойников, т.е. всего он получил не менее 1/(k+1) от всей добычи. Каждый из первых k разбойников также получил не менее, чем (1/k)\*(k/(k+1))=1/(k+1) от всей добычи.