Государственное учреждение образования

«Сластёновский учебно-педагогический комплекс

детский сад – средняя школа»

Игры, турниры, стратегии

и алгоритмы

Подготовили:

учитель математики Акимова Л.А.,

учитель математики Хоменкова Л.В.

1. Введение.

Умение решать задачи является одним из основных показателей уровня математического развития, глубины освоения учебного материала. При решении различных задач осуществляется подлинно активная математическая деятельность, в ходе которой учащиеся не просто «усваивают» готовые истины, а самостоятельно «вырабатывают» их.

В методике обучения математике многие годы была распространена классификация, основу которой составлял характер требования: а) задачи на доказательство; б) задачи на построение; в) задачи на вычисление.

В связи с расширением целей обучения и роли задач в их обеспечении в школьный курс математики начали проникать задачи, не укладывающиеся в традиционную классификацию. К ним можно отнести задачи стратегического характера.

Стратегическая задача - это игровая ситуация, для которой можно просчитать выигрышную стратегию, т. е. гарантирующую победу за конечное число ходов при любых соображениях противника. В первую очередь необходимо уяснить, что стратегическая задача заключается в том, чтобы рассчитать все возможные ходы противника, и на каждый его ход найти правильную игру.

Среди задач стратегического характера можно выделить следующие

типы:

* задачи на симметричную стратегию;
* задачи на парную стратегию;
* задачи на стратегию непрерывной угрозы;
* задачи на стратегию построения числовой последовательности;
* задачи на комбинированные стратегии.

Существуют различные методы поиска решения задач.

Один из подходов к решению задач был разработан Д. Пойа.

Автор выделяет в решении задачи четыре этапа:

а) понимание постановки задачи;

б) составление плана решения;

в) осуществление плана;

г) взгляд назад (изучение полученного решения).

На первом этапе выделяют условия и требования задачи, объектов и отношений между ними, выполняют рисунок, краткую запись условия и заключения задачи.

В стратегической задаче этот этап имеет большое значение. Чем правильнее уяснить условие и требование задачи, тем логичнее пойдёт поиск нужного решения.

Второй этап включает анализ условия и требования задачи. Под анализом условия задачи будем понимать выявление такой информации, которая непосредственно не задана условием, но присуща ему. Анализ требования задачи предполагает выяснение возможных ответов на вопрос задачи. Анализ задачи начинается с вопроса задачи, который учитель задаёт учащимся. Школьники подбирают данные, с помощью которых можно ответить на поставленный вопрос. Такое «разложение» условия задачи продолжается до тех пор, пока дойдут до такого вопроса, для ответа на который все данные в условии задачи есть. Анализ может быть записан в виде таблицы.

Поиск решения задачи может осуществляться аналитико­синтетической деятельностью.

Следующий этап - осуществление плана решения - Д. Пойа характеризует так: осуществляя план решения, контролируйте каждый свой шаг. Ясно, что реализация этого этапа предполагает владение логическими действиями, и, в первую очередь, правилами.

В стратегической задаче важно умение контролировать свои действия на каждом этапе решения. Ведь стоит ослабить внимание, и противник может перехватить инициативу.

Особое значение имеет четвёртый этап - взгляд назад. Его особенность обусловлена тем, что он является хорошим полигоном для развития творческой инициативы учащихся, самостоятельности их мышления. Решение задачи, как правило, заканчивается получением ответа или, в лучшем случае, обсуждением базиса и идеи решения. Между тем реализация этого этапа должна включать, кроме изучения полученного решения, поиск различных способов решения данной задачи, их оценку, выбор наиболее простого.

2. Основные идеи решения игровых задач

В решении игровой задачи нужно записать:

1. ход первого игрока;
2. алгоритм ходов в ответ на каждый ход соперника, т. е. стратегию победы;

3) показать, что найдется независимо от хода соперника возможность сделать ход, т. е. его последний ход будет победным.

**3. Игровые задачи**

3.1. Игры-шутки.

Игры - шутки - это такие игры, где для построения выигрышного алгоритма можно ничего и не знать, так как в них результат будет зависеть не от игры партнеров, а от начальных условий. Однако для этого в решении нужно заметить, что это игра-шутка, а не какая-то другая, в которой нужно искать выигрышную стратегию.

Задача - в том, чтобы математически доказать такую закономерность. Для доказательства обычно находится какая-то величина, которая понятно чему равна в начале и конце и понятно как изменяется на каждом ходу - тут даже частенько число ходов до конца однозначно посчитать можно. Это величина называется инвариантом (четность - самый известный инвариант в математике).

Задача 1. Двое по очереди ломают шоколадку 5x8. За ход можно разломать любой кусок по прямой линии между дольками. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Решение: Долек всегда будет 5x8=40 штук, а шоколадка в начале была одна. Заметим, что на каждом ходу один кусок шоколадки всегда разламывается на 2, т.е. количество различных кусков шоколадки увеличивается на 1. В начале это кол-во было равно 1, а в конце, как мы заметили, 40. Значит, игра продолжалась ровно 39 ходов. Поэтому последний (39-й) ход был обязательно ходом первого (его ходы - первый, третий и все с нечетными номерами) - и первый выиграл. Вот такая получилась шутка - как ни ходи, первый всегда выигрывает.

Если число кусочков шоколадки четно, тогда побеждает первый, если число нечетно, тогда второй.

Задача 3. Имеется три кучки камней: в первой - 10, во второй - 15, в третьей - 20. За ход можно разбить любую кучку на две меньшие. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

Решение: И это задача-шутка. Количество возможных ходов для раскладывания кучек: 45 - 3 = 42. Поэтому, как бы ни ходил первый игрок, при его ходе всегда будет четное число кучек. При ходе же второго игрока количество кучек будет всегда нечетно. Значит, победит первый игрок, так как по окончании игры всегда остается ровно 45 кучек по одному камню в каждой.

Задача 4. На доске написаны цифры: 10 нулей и 10 единиц. За ход можно стереть две любые цифры и написать вместо них 0, если они были одинаковые или 1, если они были разные. Если на доске остается 1 - выигрывает первый. Если 0 - второй.

Решение: Ну, поскольку число цифр с каждым ходом уменьшается ровно на 1 (2 стираем, одну пишем), а исходно их 20 и в конце должна остаться одна, то игра будет продолжаться ровно 19 ходов. Выигрыш зависит от четности последнего числа. Такой стандартный инвариант, как четность суммы всех чисел, не меняется при ходах.

Исходно сумма всех чисел четна, поэтому и в конце будет четна. А это значит, что последнее число, оставшееся в конце игры, будет четным, т.е. оно будет нулем - и выигрывает второй.

Заодно мы убедились, что не в любой игре тот, кто делает последний ход, выигрывает: можно заставить противника сделать ход, после которого он проиграет.

3.2.Симметрия.

Слово симметрия пришло к нам из Древней Греции, где оно означало «соразмерность». Очень простой, но мощный и красивый метод решения игровых задач - симметричная стратегия. Суть его - делать каждый раз ход, симметричный ходу противника или дополняющий его до чего-либо. Доказательство правильности нашей стратегии будет пользоваться тем, что после каждого нашего хода позиция симметрична: раз так, то если противник сумел сделать свой ход, то и мы сможем сделать ход, симметричный ему.

Задача 1. Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол так, чтобы они не накладывались друг на друга и не выступали за край стола. Про­игрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

Решение: Нам нужно найти такую последовательность ходов, которая позволила бы, глядя на ходы соперника, делать ходы, которые привели бы к победе. Как же ходить после хода соперника? Стол круглый, поэтому первый ход так и просится — положить пятак в центр доски. А дальше? А дальше — по симметрии, относительно центра стола! И понятно, что первый выиграет.

Можно отметить, что если доска обладает центром симметрии, тогда первый сможет выиграть на ней, действуя аналогичным образом: ставя свою фишку или монету в центр стола, а затем используя центральную симметрию.

Задача 2. Два игрока по очереди кладут на прямоугольный стол монеты одинаковой величины. Монеты не могут налегать одна на другую (запас монет можно считать неограниченным). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен играть?

Решение. Покажем, что выигрывает игрок, который делает ход первым. Он должен положить первую монету так, чтобы её центр совпадал с центром симметрии стола, а затем должен класть каждую следующую монету центрально симметрично относительно центра стола той монете, которую перед этим положил второй игрок. Так как после каждого хода игрока, делавшего ход первым, монеты на столе расположены центрально симметрично относительно центра стола, то у начинающего игру, если он будет придерживаться указанной стратегии, всегда будет возможность сделать ответный ход, центрально симметричный ходу соперника. Поэтому не может возникнуть ситуация, при которой у него нет хода. Поскольку игра конечная, то проигрывает тот, кто ходит вторым. Заметим, что эта задача, как и многие другие, приведённые в данном параграфе, может быть предложена и будет полезна на обычном уроке при прохождении темы «симметрии». Кроме того, можно предложить аналогичные задачи, например, модифицировав форму стола и монеты на любые фигуры, которые имеют центр симметрии.

Задача 3. Имеется прямоугольник 5x7 клеток в котором можно закрашивать одноклеточные квадратики, двух и трехклеточные прямоугольники. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход.

Решение. Начинающий должен закрасить центральную клетку, а затем повторять ходы соперника по другую сторону от центра клетки.

**Задача 5.** Двое по очереди ставят слонов в клетки шахматной доски 8x8 так, чтобы слоны не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

Решение: Здесь нет центральной клетки. А если бы и была, поставить симметрично относительно нее слона мы не можем, так как тогда слон вставал на поле, которое бьется слоном, который поставил соперник.

Но шахматная доска обладает другим свойством симметрии. У нее целых четыре оси симметрии. Используем симметрию относительно оси, которая проходит параллельно одной из сторон доски. Тогда, ставя своего слона симметрично относительно этой оси слону, поставленному первым игроком, выигрывает второй игрок.



3.3. Игры, в которых стратегия — дополнение до фиксированного числа

Другая идея выигрышной стратегии в играх — дополнение хода соперника до некоторого фиксированного числа, уменьшая каждым «совместным» ходом (т. е. ход первого и второго игрока) общее число элементов на некоторое постоянное число, что сводит игру к игре с меньшим числом элементов, т. е. более простой. Понятно, что победа в данной стратегии зависит от общего количества данных по условию элементов.

Рассмотрим пример такой стратегии на конкретной задаче.

Задача 1. Двое играют в игру. Ходы, которые делаются по очереди, заключаются в том, что из кучки в 50 камней убирается любое число камней от 1 до 5. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень. Кто выиграет в данной игре?

Решение: И опять выработку стратегии лучше начинать с небольшого числа камешков. Понятно, что если в нашей кучке меньше шести камней, тогда выиграет первый игрок: он первым своим ходом заберет все камни.

Если бы в нашей кучке было 6 камешков, тогда понятно, что второй выиграет, так как он забрал бы все оставшиеся камни после первого хода начинающего.

Если камней семь? Что делать тогда первому? Ему нужно забрать один камень и свести задачу к предыдущему случаю. Аналогично надо выработать стратегию игры и для 7, 8, 9,10,11 камней.

Когда камней 12, то понятно, что выиграет второй: как бы первый не ходил, он своим ходом может взять такое количество камней, чтобы осталось ровно 6. А в этом случае он выигрывает, как мы уже разобрали.

Итак, если число камней делится на 6, то выигрывает второй, если не делится, то первый. Докажем это.

Пусть у нас 6t камней. После первого хода игрока, начинающего игру, второй делает ход, после которого остается 6t - 6 камней, т. е. число камней в кучке уменьшилось на 6. Несложно понять, что последний камень возьмет игрок, делающий второй ход, и также понятно, что у него всегда есть возможность сделать ход.

Пусть у нас 6t+a, где 1 < а < 5, камней. Тогда начинающий первым своим ходом убирает все, что «мешает», т. е. а камней, и остается всего 6 t камней, т. е. сводит игру к рассматриваемому выше случаю, где он уже второй игрок. Значит в этом случае побеждает игрок, делающий первый ход.

В нашей задаче 50 камней. Поэтому выигрывает первый, беря из кучки два камня и оставляя 48 камней. Далее после его последующих ходов в кучке будет оставаться соответственно 42, 36, 30, 24, 18, 12, 6, 0, таким образом, последний камень забирает первый игрок.

Задача 2. Двое играют в игру, которая заключается в прибавлении к нулю любого натурального числа, не превышающего пяти. Выигрывает тот, кто скажет число 50. Кто выиграет в данной игре?

Решение: Мы видим, что игра совершенно аналогична рассматриваемой выше, только там убираются камни, а здесь добавляются числа, т. е. игра идет как бы в обратном порядке.

Начинающий первым ходом говорит число 2, и при каждом следу­ющем ходе будет говорить число, которое больше предыдущего (т. е. сказанному им на предыдущем ходу) ровно на 6. Итак, на втором ходу он говорит число 8, на третьем - 14, ..., на девятом - 50.

Второй игрок не сможет помешать начинающему, так как максимальное число, которое он может прибавить к сказанному первым игроком — это 5, а минимальное - это 1 (а разность между числами, произносимыми первым, - 6).

Задача 3. Возьмите 18 спичек, разложите их на столе и проведите с товарищем такую игру. Каждый их двух играющих по очереди берет две спичи. За один раз можно брать одну, две, три или четыре спички. Выигрывает тот, кто берет последнюю спичку. Рассчитайте, сколько спичек должен брать начинающий игру, чтобы всегда выигрывать.

Решение: Для отыскания решения удобно начинать рассуждения с конца. Очевидно, что начинающий перед последним ходом оставить 5 спичек. Тогда сколь бы спичек не взял второй 1,2,3,4, у первого будет сделать последний ход. В свою очередь, для того, чтобы иметь возможность оставить своему партнеру 5 спичек, следует ему перед этим оставить 10, потом 15. Значит тот игрок, который начинает игру, должен взять сначала 3 спички.

3.4. Вспомогательные раскраски в шахматном порядке

Задача 1. Доску размером 10х 10 клеток разрезать на фигурки в форме буквы Т, состоящие из четырех клеток.

Решение: Предположим, что доска 10х 10 клеток разбита на такие фигурки. Каждая фигурка содержит либо 1, либо 3 черные клетки, т.е. всегда нечетное число. Самих фигурок должно быть 100/4=25 штук. Поэтому они содержат нечетное число черных клеток, а всего черных клеток 100/2=50 штук. Получено противоречие.

3.5. Метод выигрышных позиций

Задача 1. "Хромая ладья" может ходить по прямой вправо или вверх. Исходно она стоит в нижнем левым углу доски. Играют двое. Выигрывает тот, кто поставит ладью в верхний правый угол.

Решение: Исходно ладья стоит на главной (в данном случае - главной) диагонали доски. Первый игрок своим ходом уводит ее с диагонали в сторону. Тогда второй игрок может вернуть ладью обратно на диагональ (посмотрите, как). Потом первый опять уведен ее с диагонали (ходов с главной диагонали на нее же нет), а второй... опять сможет вернуть и т.д. Так как клетка назначения лежит на главной диагонали, то на ней ладья обязательно окажется после хода второго - и второй выигрывает. Читаем между строк: «множество выигрышных позиций» - это главная диагональ.

3.5. Метод выигрышных позиций

Задача 1. "Хромая ладья" может ходить по прямой вправо или вверх. Исходно она стоит в нижнем левым углу доски. Играют двое. Выигрывает тот, кто поставит ладью в верхний правый угол.

Решение: Исходно ладья стоит на главной (в данном случае - главной) диагонали доски. Первый игрок своим ходом уводит ее с диагонали в сторону. Тогда второй игрок может вернуть ладью обратно на диагональ (посмотрите, как). Потом первый опять уведен ее с диагонали (ходов с главной диагонали на нее же нет), а второй... опять сможет вернуть и т.д. Так как клетка назначения лежит на главной диагонали, то на ней ладья обязательно окажется после хода второго - и второй выигрывает. Читаем между строк: «множество выигрышных позиций» - это главная диагональ.