Метод математической индукции

Пример решения задачи на доказательство неравенства

Задание.

Доказать неравенство: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$ $(n>1)$.

Решение.

Пусть n = 2. Тогда исходное неравенство примет вид:

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{13}{24}$, $\frac{7}{12}>\frac{13}{24}$, $\frac{14}{24}>\frac{13}{24}$.

Предположим, что для произвольного натурального числа k (k > 2) исходное неравенство выполняется, то есть, $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}$

Покажем, что в этом случае неравенство выполняется и для числа k + 1. То есть, докажем неравенство $\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}>\frac{13}{24}$

Оценим левую часть неравенства, учитывая, что $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}$

Имеем:

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}=$$
$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k}+\left(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{k+1}\right)=$$
$$=\underbrace{\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k}}_{>13/24}+\underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{(2k+1)(k+1)}}_{>0}>\frac{13}{24}.$$

Таким образом, неравенство $\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}>\frac{13}{24}$ выполнено. Значит, исходное неравенство имеет место для любого натурального числа n, не равного 1.