**НАБОР ЗАДАЧ**

**ПО ТЕМЕ: «ИНВАРИАНТЫ. ЧЕТНОСТЬ, НЕЧЕТНОСТЬ.**

**ЗАДАЧИ НА РАСКРАСКИ, УКЛАДКИ, ЗАМОЩЕНИЯ»**

**Задача 1**

На плоскости отметили все вершины правильного *n*-угольника, а также его центр. Затем нарисовали контур этого *n*-угольника, и центр соединили со всеми вершинами; в итоге *n*-угольник разбился на  *n* треугольников. Вася записал в каждую отмеченную точку по числу (среди чисел могут быть равные). В каждый треугольник разбиения он записал в произвольном порядке три числа, стоящих в его вершинах; после этого он стёр числа в отмеченных точках. При каких *n* по тройкам чисел, записанным в треугольниках, Петя всегда сможет восстановить число в каждой отмеченной точке?

**Задача 2**

Какое наибольшее количество клеток можно отметить на шахматной доске так, чтобы с каждой из них на любую другую отмеченную клетку можно было пройти ровно двумя ходами шахматного коня?

**Задача 3**

На некоторых клетках доски 10×10 сидит по мошке. Раз в минуту мошки одновременно перелетают, причём каждая – в соседнюю клетку (по стороне). Мошка перелетает строго в одном из четырёх направлений, параллельных сторонам доски, сохраняет направление, пока это возможно, иначе меняет его на противоположное. Пес Барбос наблюдал за мошками в течение часа и ни разу не видел, чтобы две из них сидели на одной клетке. Какое наибольшее количество мошек могло перелетать по доске?

**Задача 4**

Миша написал на доске в некотором порядке 2004 плюса и 2005 минусов. Время от времени Юра подходит к доске, стирает любые два знака и пишет вместо них один, причём если он стёр одинаковые знаки, то вместо них он пишет плюс, а если разные, то минус. После нескольких таких действий на доске остался только один знак. Какой?

**Задача 5**

Написанное на доске четырехзначное число можно заменить на другое, прибавив к двум его соседним цифрам по единице, если ни одна из этих цифр не равна 9; либо, вычтя из соседних двух цифр по единице, если ни одна из них не равна 0. Можно ли с помощью таких операций из числа 1234 получить число 2002?

**Задача 6**

Дана шахматная доска. Разрешается перекрашивать в другой цвет сразу все клетки, расположенные внутри квадрата размером 2×2. Может ли при этом на доске остаться ровно одна черная клетка?

**Задача 7**

Имеется два стакана, в первом стакане налито некоторое количество воды, а во втором – такое же количество спирта. Разрешается переливать некоторое количество жидкости из одного стакана в другой (при этом раствор равномерно перемешивается). Можно ли с помощью таких операций получить в первом стакане раствор, в котором процентное содержание спирта больше, чем во втором?

**Задача 8**

На квадратном поле 10\*10 девять клеток 1\*1 поросли бурьяном. После этого бурьян может распространиться на клетку, у которой не менее двух соседних клеток уже поросли бурьяном. Докажите, что тем не менее бурьян не сможет распространиться на все клетки.

**Задача 9**

На доске записаны несколько чисел. За один ход разрешается любые два из них *a* и *b*, одновременно не равные нулю, заменить на числа  *a – b*/2  и  *b + a*/2.  Можно ли через несколько таких ходов получить на доске исходные числа?

**Задача 10**

10 фишек стоят на столе по кругу. Сверху фишки красные, снизу – синие. Разрешены две операции:
  а) перевернуть четыре фишки, стоящие подряд;
  б) перевернуть четыре фишки, расположенные так:  ××0××  (× – фишка, входящая в четвёрку, 0 – не входящая).
Удастся ли, используя несколько раз разрешённые операции, перевернуть все фишки синей стороной вверх?

**Задача 11**

На доске выписаны числа 1, ½, ⅓, ..., 1/100. Выбираем из написанных на доске два произвольных числа *a* и *b*, стираем их и пишем на доску число
*a + b + ab*.  Такую операцию проделываем 99 раз, пока не останется одно число. Какое это число? Найдите его и докажите, что оно не зависит от последовательности выбора чисел.

**Задача 12**

Квадратный трёхчлен  *f*(*x*) разрешается заменить на один из трёхчленов      или      Можно ли с помощью таких операций из квадратного трёхчлена  *x*² + 4*x* + 3  получить трёхчлен  *x*² + 10*x* + 9?

**Задача 13**

По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное количество комнат, занумерованных числами от минус бесконечности до плюс бесконечности. В комнатах живут 9 пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов), кроме того, в каждой комнате находится по роялю. Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах (*k*-й и (*k*+1)-й), приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в (*k*–1)-ю и (*k*+2)-ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся. (Пианисты, живущие в одной комнате, друг другу не мешают.)

**Задача 14**

По кругу стоит 101 мудрец. Каждый из них либо считает, что Земля вращается вокруг Юпитера, либо считает, что Юпитер вращается вокруг Земли. Один раз в минуту все мудрецы одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый мудрец, оба соседа которого думают иначе, чем он, меняет своё мнение, а остальные – не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться.

**Задача 15**

В одной из вершин шестиугольника лежит золотая монета, а в остальных ничего не лежит. Кощей Бессмертный чахнет над златом и каждое утро снимает с одной вершины произвольное количество монет, после чего тут же кладёт на соседнюю вершину в шесть раз больше монет. Если к исходу какого-то дня во всех вершинах будет поровну монет, Кощей станет Властелином Мира. Докажите, что хоть злата у него сколько угодно, но Властелином Мира ему не бывать.

**Задача 16**

На экране компьютера – число 141. Каждую секунду компьютер перемножает все цифры числа на экране, полученное произведение либо прибавляет к этому числу, либо вычитает из него, а результат появляется на экране вместо исходного числа. Появится ли еще когда-нибудь на экране число 141?

**РЕШЕНИЯ**

**Решение 1**

  Пусть *A*1*A*2...*An* – данный многоугольник, а *S* – его центр.
  Покажем, что, если *n* чётно, то существуют две различные расстановки, при которых соответствующие тройки будут одинаковыми. Тогда Петя не сможет восстановить исходные числа. Поставим в *S* число 1, а в вершины *n*-угольника – единицы и двойки чередующимся образом. При сдвиге чисел на один шаг по часовой стрелке тройки

{1, 1, 2}  не изменятся.
  При нечётном *n* Петя сможет восстановить все числа. Отметим, что число из вершины *Ai* пишется в двух тройках, а число из *S* – в *n* тройках. Значит, только число из *S* будет встречаться во всех тройках нечётное число раз, и Петя сможет его определить. После этого для каждой пары соседних вершин *n* -угольника он знает, какие два числа написаны в них. Осталось по этим данным восстановить числа в вершинах. Выписав числа из всех пар соседних вершин, мы получим "удвоенный" набор всех чисел в вершинах. Сравнив его с набором чисел в парах  (*A*1, *A*2),  (*A*3, *A*4),  ...,
(*An*–2, *An*–1),  мы найдём число в вершине *An*. Аналогично находятся числа в остальных вершинах.

**Ответ**

При нечётных *n*.

**Решение 2**

  Пусть конь находится на клетке какого-то цвета, тогда через два хода он окажется на клетке того же цвета. Значит, отмечены должны быть клетки одного цвета (пусть чёрного).
  Разобьём все чёрные клетки доски на восемь четырёхклеточных фигур двух видов (полосатая и серая), изображённых на рисунке.



  Расстояние между двумя клетками каждой такой фигуры – не менее четырёх ходов коня. Поэтому каждая из этих фигур может содержать не более одной отмеченной клетки. Следовательно, отмечено не более восьми клеток.   *Пример* для восьми отмеченных клеток см. на рисунке.



**Ответ:** 8 клеток.

**Решение 3**

  *Оценка*. На одной вертикали может быть не более двух мошек, перелетающих по вертикали (иначе мошки, находящиеся в клетках одного цвета, встретятся). То же верно для горизонталей. Итого на 20 горизонталях и вертикалях – не более 40 мошек.
  *Пример*. Ясно, что мошки с клеток разных цветов не смогут встретиться. Поэтому достаточно указать только 20 "белых" мошек (расположение "чёрных" мошек можно получить, например, симметрией относительно средней линии).
  На левом рисунке нарисована одна "вертикальная" мошка *В* и все запрещенные положения "горизонтальных" мошек, (то есть те, начиная с которых, "горизонтальная" мошка может оказаться с *В* на одной клетке). Как видим, запрещённые клетки образуют два прямоугольника, построенных на проходящих через *В* диагоналях. На правом рисунке размещены 10 "вертикальных" мошек и все запрещённые ими положения "горизонтальных". Мы видим, что в каждой горизонтали осталась хотя бы одна незапрещенная белая клетка, куда можно посадить "горизонтальную" мошку.



**Ответ**

40 мошек.

**Решение 4.**

При каждой операции количество минусов либо не изменяется, либо уменьшается на 2. Поэтому чётность количества минусов не меняется.

ИЛИ Заменим плюсы на единицы, а минусы на минус единицы. Тогда произведение написанных чисел не меняется. Поскольку изначально оно было отрицательным, то на доске останется –1 (бывший минус).

**Ответ** Минус.

**Решение 5**

 **Подсказка**

Сумма цифр на четных местах и сумма цифр на нечетных местах меняются одинаково.

Пусть на доске написано число abcd. Тогда рассматриваемые операции не изменяют число M=(d+b)-(a+c), так как они увеличивают (уменьшают) на единицу одно число из первой скобки, и одно число - из второй. Для числа 1234 число M=(4+2)-(1+3)=2, для числа 2002 число M=(2+0)-(2+0)=0. Поэтому требуемое невозможно.

**Решение 6**

При перекрашивании квадрата 2×2, содержащего *k* черных и 4 - *k* белых клеток, получится 4 - *k* черных и *k* белых клеток. Поэтому число черных клеток изменится на (4 - *k*) - *k* = 4 - 2*k*, т. е. на четное число. Так как четность числа черных клеток сохраняется, из исходных 32 черных клеток мы не сможем получить одну черную клетку.

**Решение 7**

**Подсказка**

Докажите, что в первом стакане воды всегда будет не меньше, чем спирта, а во втором стакане – наоборот.

  Для определенности примем количество жидкости, налитое в каждом из стаканов, равным 100 г. Докажем, что в первом стакане процентное содержание спирта никогда не превысит 50%, а во втором никогда не будет ниже 50%.
  В начальный момент данное утверждение верно. Пусть оно верно в некоторый момент: в первом стакане воды не меньше, чем спирта, а во втором спирта не меньше, чем воды. Пусть мы перелили некоторое количество жидкости из первого стакана во второй. Тогда процентное содержание спирта в первом стакане осталось тем же, то есть в нём по-прежнему воды не меньше, чем спирта. Но во втором стакане в сумме с первым 100 г воды и 100 г спирта. Следовательно, во втором стакане после переливания спирта будет не меньше, чем воды. Итак, утверждение остается верным при переливаниях.

**Ответ** Нельзя.

**Решение 8**

**Подсказка** Как изменяется периметр области, поросшей бурьяном?

Рассмотрим границу области, поросшей бурьяном (т.е. все отрезки длиной 1 между узлами, по одну сторону от которых бурьян, а по другую - нет). Вначале длина границы была не более 9\*4=36, поскольку бурьян рос только в девяти клетках. Нетрудно заметить, что в процессе распространения бурьяна длина границы не может увеличиваться. Но если бы все поле 10\*10 в некоторый момент оказалось поросшим бурьяном, то длина границы стала бы равной 10\*4=40, что противоречит соображениям, приведенным выше.

**Решение 9**

**Подсказка** Что происходит с суммой квадратов чисел, выписанных на доске?

  Рассмотрим сумму квадратов чисел, выписанных на доске, и покажем, что эта сумма увеличивается. Этим будет обоснован отрицательный ответ на вопрос задачи.
  Действительно,  (*a – b*/2)² + (*b + a*/2)² = 5/4 (*a*² + *b*²) > *a*² + *b*².

**Ответ** Нельзя.

**Решение 10**

Отметим пять фишек через одну. Заметим, что при каждой разрешённой операции переворачиваются ровно две отмеченные фишки. Сначала среди отмеченных фишек было 5 красных (имеется в виду верхний из цветов). При каждой операции количество красных фишек либо не меняется, либо изменяется на 2. Итак, среди отмеченных фишек красных фишек всегда остаётся нечётное число.

**Ответ** Не удастся.

**Решение 11**

Если  *a*1, *a*2, ..., *an*  – числа, написанные на доске, то величина  (1 + *a*1)(1 + *a*2)...(1 + *an*)  не изменяется при допустимой операции. Действительно, если *a* и *b* заменяются на  *a + b + ab*,  то множители, не содержащие *a* и *b*, не изменяются, а произведение  (1 + *a*)(1 + *b*)  заменяется на равное ему число
1 + *a + b + ab*.  Значит, последнее число на доске равно  (1 + 1/1)(1 + ½)...(1 + 1/100) – 1 = 2/1·3/2·...·101/100 – 1 = 101 – 1 = 100.

**Ответ** 100.

**Решение 12**

Пусть  *f*(*x*) = *ax*² + *bx + c*.  Заметим, что при допустимых операциях дискриминант трёхчлена не меняется: при первой операции  *f*(*x*) меняется на трёхчлен  (*a + b + c*)*x*² + (*b* + 2*a*)*x + a*  с дискриминантом  (*b* + 2*a*)² – 4*a*(*a + b + с*) = *b*² + 4*ab* + 4*a*2 – 4*a*² – 4*ab* – 4*ac = b*² – 4*ac*,  а при второй – на трёхчлен
*cx*² + (*b* – 2*c*)*x* + (*a – b + c*)  с дискриминантом  (*b* – 2*c*)² – 4*c*(*a – b + c*) = *b*² – 4*bc* + 4*c*² – 4*ac* + 4*bc* – 4*c*² = *b*² – 4*ac*.  Но у трёхчлена  *x*² + 4*x* + 3  дискриминант равен  16 – 4·3 = 4,  а у трёхчлена  *x*² + 10*x* + 9  он равен  100 – 4·9 = 64;  следовательно, получить из первого трёхчлена второй невозможно.

**Решение 13**

  Рассмотрим произвольные три подряд идущие комнаты (с номерами *n*,  *n* + 1,  *n* + 2).  Если в одной из них когда-нибудь окажется пианист, то эта тройка комнат уже никогда не опустеет: чтобы покинуть эту тройку, пианист должен переселиться из *n*-й комнаты в (*n*–1)-ю (или из (*n*+2)-й в (*n*+3)-ю, что симметрично), но тогда кто-то переселяется из (*n*+1)-й в (*n*+2)-ю, и на этом шаге рассматриваемая тройка комнат непуста.
  Разобьём весь коридор на такие тройки. Количество "занятых" троек не превосходит 9, и "занятые" тройки не освобождаются, следовательно, пианисты никогда не покидают некоторую *ограниченную*часть коридора.   С другой стороны, сумма *квадратов* номеров комнат, в которых живут пианисты (с учетом кратности) при каждом переселении *возрастает*, поскольку  *k*² + (*k* + 1)² < (*k* – 1)² + (*k* + 2)².  Значит, когда-нибудь переселения прекратятся.

**Замечания**

**Идеология**. Интуитивно утверждение задачи довольно понятно: распределение пианистов становится все более "разреженным". Когда оно станет совсем "разреженным", переселения должны прекратиться, потому что соседствующих пианистов не останется. Нужно только придать этим рассуждениям строгую форму.

**Решение 14**

   Сопоставим каждому мудрецу с некоторым мнением знак "+", а с противоположным – знак "–". Тогда расстановке мудрецов соответствует расстановка 101 знака по кругу.
   Пусть в некоторый момент два одинаковых знака стоят подряд. Тогда в следующую минуту они не изменятся, и поэтому останутся одинаковыми. Значит, ни в один из последующих моментов они также не изменятся.
   Назовём знак *стабильным*, если рядом с ним стоит хотя бы один такой же. Поскольку количество знаков нечётно, стабильный знак найдётся. Кроме того, любой стабильный знак уже не изменяется и остаётся стабильным, а любой нестабильный знак в очередную минуту меняется на противоположный. Если в какой-то момент не все знаки стабильны, то найдётся стабильный знак *a*, соседний с нестабильным знаком *b*. В следующую минуту *a* не изменится, а *b* изменится, то есть станет таким же, как *a* и, следовательно, стабильным.
   Итак, пока нестабильные знаки есть, их количество строго уменьшается. Значит, рано или поздно оно станет равным нулю, и перемены знаков закончатся.

**Замечания**

Можно показать, что знаки могут изменяться в течение лишь первых 50 минут.

**Решение 15**

  Занумеруем вершины шестиугольника, начиная с той, где лежит монета, последовательными натуральными числами от 1 до 6. По условию разность между числом монет в нечётных вершинах и числом монет в чётных вершинах каждый день меняется на число, кратное 7.
  В начальный момент эта разность равнялась 1. Поэтому сделать её равной нулю Кощею не удастся. Тем более ему не удастся уравнять количество монет во всех вершинах.

**Решение 16**

  На первом шаге на экране появится либо число 145, либо число 137.
  В первом случае число 141 никогда появиться не сможет, так как если число на экране оканчивается на 5, то произведение его цифр кратно пяти. Поэтому из числа, оканчивающегося на 5, можно получить только число, оканчивающееся на 5 или на 0. Если же число оканчивается на 0, то оно в дальнейшем не изменяется.
  Во втором случае на следующем шаге возникнет либо число 158, либо число 116. Но произведение цифр чётного числа чётно, поэтому из чётного числа можно получить только чётное. А так как 141 – число нечётное, то и в этом случае его получить не удастся.

**Ответ** Не появится.