УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета республиканской олимпиады
заместитель Министра образования
Республики Беларусь

К.С.ФАРИНО

12 декабря 2008 г.

LIX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

3 – 6 января 2009 года

8 класс

Первый день

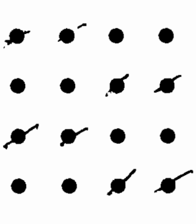
1. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведены высота $CH = 4$ см и медиана $CM = 8$ см.

Найдите величину угла CAB.

2. На олимпиаду по математике прибыло несколько учащихся 8 класса. Некоторые из них оказались уже знакомыми. При встрече Маша улыбнулась своему знакомому Саше. А Коля улыбнулся незнакомой ему девочке Оле. И вообще, каждая восьмиклассница улыбнулась каждому знакомому ей восьмикласснику, а каждый восьмиклассник улыбнулся каждой незнакомой ему восьмикласснице. В результате было зафиксировано 155 улыбок.

Сколько всего учащихся 8 класса участвовало в олимпиаде ?

3. На клетчатой бумаге нарисовали квадрат 3×3 с вершинами в узлах сетки и отметили все 16 узлов, которые он содержит (см. рис.).



Какое наименьшее число из этих 16 узлов нужно стереть, так, чтобы, какую бы прямую ни провести (не обязательно параллельно сторонам квадрата), она содержала бы не более двух из оставшихся узлов ?

4. На доске записаны все натуральные числа от 1 до 30.

Какое наименьшее количество из них нужно стереть, так, чтобы сумма любых двух различных из оставшихся чисел была составным числом ? (Натуральное число называется составным, если оно разлагается в произведение двух натуральных чисел, бо́льших 1.)

Пользоваться калькулятором не разрешается.

Время работы: 4,5 часа.

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета республиканской олимпиады
заместитель Министра образования
Республики Беларусь

К.С.ФАРИНО

12 декабря 2008 г.

LIX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

3 – 6 января 2009 года

9 – 9' классы

Первый день

1. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D так, что центр вписанной окружности треугольника ABD совпадает с ортоцентром (точкой пересечения высот) треугольника ABC.

Найдите величину угла CAB, если $\angle ABC = 70°$.

2. На доске записаны все натуральные числа от 1 до 20.

Какое наименьшее количество из них нужно стереть, так, чтобы сумма любых двух различных из оставшихся чисел была составным числом ? (Натуральное число называется составным, если оно разлагается в произведение двух натуральных чисел, бо́льших 1.)

3. Существуют ли такие 100 различных натуральных чисел, что, какие бы три числа a, b, c из них ни выбрать (в произвольном порядке), квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не будет иметь действительных корней?

4. а) Действительное число a таково, что числа $a^2 - a$ и $a^3 - 2a$ целые. Можно ли утверждать, что число a целое?

б) Действительное число b таково, что числа $b^2 - b$ и $b^3 + b$ целые. Можно ли утверждать, что число b целое?

В обоих случаях если можно, то почему, если нельзя, то найдите все не целые числа, удовлетворяющие условию.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета республиканской олимпиады
заместитель Министра образования
Республики Беларусь

К.С.ФАРИНО

19 декабря 2008 г.

LIX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

3 – 6 января 2009 года

11 – 11' классы

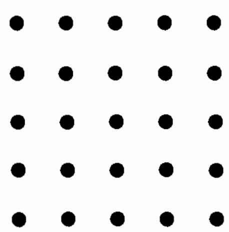
Первый день

1. Пусть m и n — произвольные натуральные числа. Докажите, что m делит n тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{[m;n]}{(m;n)} + \frac{m}{n} = \frac{(m;n)}{[m;n]} + \frac{n}{m},$$

где через $[a,b]$ и (a,b) обозначены наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел a и b соответственно.

2. На клетчатой бумаге нарисовали квадрат 4×4 с вершинами в узлах сетки и отметили все 25 узлов, которые он содержит (см. рис.).



Какое наименьшее число из этих 25 узлов нужно стереть, так, чтобы, какую бы прямую ни провести (не обязательно параллельно сторонам квадрата), она содержала бы не более двух из оставшихся узлов ?

3. Найдите все значения параметра α, при которых многочлен $x^5 - \alpha x^3 + x - 1$ можно представить в виде произведения двух отличных от константы многочленов с целыми коэффициентами.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Известно, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке A_1B_1.

Докажите, что $\sin\angle A \cdot \sin\angle B \cdot \cos\angle C = 0,5$.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов.

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета республиканской олимпиады
заместитель Министра образования
Республики Беларусь

К.С.ФАРИНО

19 декабря 2008 г.

LIX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

3 – 6 января 2009 года

8 класс

Второй день

5. В десятичной записи числа $МАГМА$ цифры заменены буквами (одинаковые цифры заменены одинаковыми буквами, различные цифры – различными буквами). Известно, что число $МАГМА$ делится на 13.

Укажите (с обоснованием) какая цифра заменена буквой $Г$.

6. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известно, что $AB = DC > BC$ и $\angle ABD = \angle CBD$.

Докажите, что $AD > BC$.

7. Существует ли прямоугольный треугольник, длины катетов которого выражаются целыми числами, а длина гипотенузы равна

а) $\sqrt{2008}$; **б)** $\sqrt{2009}$?

8. а) С доской 3×4, каждая клетка которой покрашена в один из трех цветов – белый, черный или зеленый, проделывается следующая операция. Выбираются такие любые две клетки доски, что из одной из них в другую шахматный конь может попасть за один ход (т.е. такие клетки, которые являются диагонально противоположными в некотором прямоугольнике 2×3), и перекрашивается каждая из них в *запасной* цвет. Запасным цветом для черного является белый, запасным для белого – зеленый, для зеленого – черный. В начале клетки доски покрашены в черный и белый цвет в шахматном порядке.

Можно ли с помощью конечного числа таких операций получить доску, у которой каждая клетка, бывшая в первоначальной раскраске белой, станет черной, а любая клетка, бывшая в первоначальной раскраске черной, станет белой?

б) Тот же вопрос, если доска имеет размеры 4×4.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 4,5 часа

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета республиканской олимпиады
заместитель Министра образования
Республики Беларусь

К.С.ФАРИНО

12 декабря 2008 г.

LIX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

3 – 6 января 2009 года

9 – 9' классы

Второй день

5. В десятичной записи числа *БАРАБАН* цифры заменены буквами (одинаковые цифры заменены одинаковыми буквами, различные цифры – различными буквами). Известно, что число *БАРАБАН* делится на 91.

Найдите (с обоснованием) наименьшее возможное значение числа *БАРАБАН*.

6. Точка M – середина стороны AB треугольника ABC. На стороне AC отмечена точка N так, что $AN > NC$.

Докажите, что $AC + CB > 2(MN + NC)$.

7. Действительные числа a, b, c, бо́льшие $\frac{1}{4}$, таковы, что $abc = 1$. Докажите, что $\dfrac{ab}{a+b+c^2} + \dfrac{bc}{b+c+a^2} + \dfrac{ca}{c+a+b^2} \leqslant \dfrac{1}{4a-1} + \dfrac{1}{4b-1} + \dfrac{1}{4c-1}$.

8. С доской 8×8, каждая клетка которой покрашена в один из трех цветов – белый, черный или зеленый, проделывается следующая операция. Выбираются такие любые две клетки доски, что из одной из них в другую шахматный конь может попасть за один ход (т.е. такие клетки, которые являются диагонально противоположными в некотором прямоугольнике 2×3), и перекрашивается каждая из них в *запасной* цвет. Запасным цветом для черного является белый, запасным для белого – зеленый, для зеленого – черный. В начале клетки доски покрашены в черный и белый цвет в шахматном порядке.

Можно ли с помощью конечного числа таких операций получить доску, у которой каждая клетка, бывшая в первоначальной раскраске белой, станет черной, а любая клетка, бывшая в первоначальной раскраске черной, станет белой ?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета республиканской олимпиады
заместитель Министра образования
Республики Беларусь

К.С.ФАРИНО

12 декабря 2008 г.

LIX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

3 – 6 января 2009 года

11 – 11' классы

Второй день

5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle BAC = 60°$, $\angle ADC = 150°$, $AB = BD$.

Найдите величину угла ACB.

6. Докажите, что

$$\frac{1}{1004^{1/2}\cdot 1005^{3/2}}+\frac{1}{1005^{1/2}\cdot 1006^{3/2}}+\ldots+\frac{1}{2007^{1/2}\cdot 2008^{3/2}}<\frac{1}{2008}.$$

7. Найдите все функции f, определенные на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, для которых равенство

$$f(x+y^2)+f(x^2+y)=2f(xy)$$

выполнено для всех действительных значений x и y.

8. С доской $2n\times 2n$, каждая клетка которой покрашена в один из трех цветов — белый, черный или зеленый, проделывается следующая операция. Выбираются такие любые две клетки доски, что из одной из них в другую шахматный конь может попасть за один ход (т.е. такие клетки, которые являются диагонально противоположными в некотором прямоугольнике 2×3), и перекрашивается каждая из них в *запасной* цвет. Запасным цветом для черного является белый, запасным для белого — зеленый, для зеленого — черный. В начале клетки доски покрашены в черный и белый цвет в шахматном порядке.

Найдите все n, при которых с помощью конечного числа таких операций можно получить доску, у которой каждая клетка, бывшая в первоначальной раскраске была белой, станет черной, а любая клетка, бывшая в первоначальной раскраске черной, станет белой.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов.

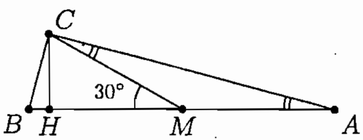
РЕШЕНИЯ

Первый день

8 класс

8.1. Ответ: 15°.

Пусть $\alpha = \angle CAB$ — искомый угол. Поскольку в прямоугольном треугольнике



CHM гипотенуза CM в два раза больше катета CH, то $\angle CMH = 30^\circ$, а $\angle HCM = 60^\circ$. Кроме того, так как медиана CM прямоугольного треугольника ABC равна половине гипотенузы AB, то треугольник CMA равнобедренный, и, следовательно, $\angle ACM = \angle CAM = \alpha$. Таким образом, в прямоугольном треугольнике CHA имеем $\angle HCA = 90^\circ - \alpha = 60^\circ + \alpha$, откуда $\alpha = 15^\circ$.

8.2. Ответ: 36.

Рассмотрим произвольного восьмиклассника и произвольную восьмиклассницу, прибывших на олимпиаду (пусть для определенности их зовут Вася и Света). Согласно условию, если они знакомы между собой, то Света улыбнулась Васе, а если нет, то Вася — Свете. Видим, что в каждой паре "мальчик — девочка"была ровно одна улыбка. Пусть на олимпиаде среди учащихся 8 класса участвовало m мальчиков и n девочек. Тогда число таких пар, а значит, и число всех улыбок равно $m \cdot n$. Согласно условию $m \cdot n = 155$. Так как $155 = 5 \cdot 31$ — произведение двух простых чисел, и из условия следует, что $m > 1$ и $n > 1$ (в олимпиаде участвовали Маша, Оля, Коля, Саша), то $m = 5$, $n = 31$, или $n = 5$, $m = 31$. В любом случае число учащихся 8 класса на олимпиаде равно $n + m = 5 + 31 = 36$.

8.3. Ответ: 8 узлов.

Так как каждая из четырёх „горизонтальных" прямых, проходящих через узлы

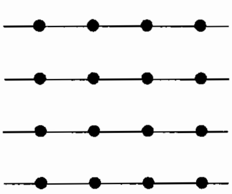


Рис. 1

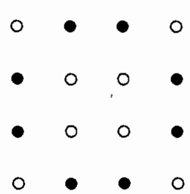


Рис. 2

квадрата, (см. рис. 1) содержит по 4 узла, то в каждом горизонтальном ряду, чтобы условие задачи было выполнено, необходимо стереть хотя бы по 2 узла. Значит, всего нужно стереть не менее $4 \cdot 2 = 8$ узлов.

С другой стороны, легко видеть, что стереть 8 узлов так, чтобы выполнялось условие задачи можно — см. рис. 2, на котором стёртые узлы показаны светлыми кружочками.

8.4. Ответ: 15 чисел.

Разложим простое число 31 в сумму двух натуральных чисел всеми возможными способами. Получим 15 равенств

$$31 = 1 + 30 = 2 + 39 = 3 + 28 = \ldots = 14 + 17 = 15 + 16,$$

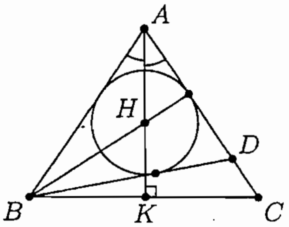
или, иными словами, 15 пар чисел $(1, 30)$, $(2, 29)$, $(3, 28)$, $\ldots$, $(14, 17)$, $(15, 16)$, таких, что сумма чисел в каждой паре — простое число. Следовательно, чтобы условие задачи было выполнено, в каждой из этих пар необходимо стереть хотя бы одно число. Поэтому, поскольку каждое из чисел 1, 2, $\ldots$, 30 входит ровно в одну пару, стереть нужно не менее 15 чисел.

С другой стороны, легко видеть, что стереть 15 чисел так, чтобы выполнялось условие задачи, можно: достаточно, например, стереть все 15 нечётных чисел.

9 — 9' классы

9.1. Ответ: 40°.

Пусть H — ортоцентр треугольника ABC и, по условию, центр вписанной окружности треугольника ABD. Тогда AK — высота и биссектриса треугольника ABC, и, следовательно, треугольник ABC — равнобедренный, $AB = AC$. Тогда $\angle ABC = \angle ACB$, и поэтому



$$\angle BAC = 180^\circ - 2\angle ABC = 180^\circ - 2\cdot 70^\circ = 40^\circ.$$

9.2. Ответ: 10 чисел.

Разложим простое число 23 в сумму двух натуральных чисел, каждое из которых не больше 20, всеми возможными способами. Получим 9 равенств

$$23 = 3 + 20 = 4 + 19 = 5 + 18 = \ldots = 10 + 13 = 11 + 12.$$

Присоединим к ним ещё равенство $3 = 1+2$. Эти равенства дают разбиение натуральных чисел от 1 до 20 на 10 пар

$$(3,20),\ (4,19),\ (5,18),\ \ldots,\ (10,13),\ (11,12) \quad \text{и} \quad (1,2), \qquad (*)$$

таких, что сумма чисел в каждой паре — простое число (сумма чисел в каждой из первых девяти пар $(*)$ равна 23, а в последней — 3). Следовательно, чтобы условие задачи было выполнено, в каждой из этих пар необходимо стереть хотя бы одно число. Поэтому, поскольку каждое из чисел 1, 2, ..., 20 входит ровно в одну из пар $(*)$, стереть нужно не менее 10 чисел.

С другой стороны, легко видеть, что стереть 10 чисел так, чтобы выполнялось условие задачи, можно: достаточно, например, стереть все 10 нечётных чисел.

9.3. Ответ: существуют.

Действительно, нужными свойствами обладают, например, последовательные 100 натуральных чисел от 101 до 200. Рассмотрим дискриминант уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, равный $D = b^2 - 4ac$. Если a, b и c — любые три из указанных чисел, то

$$D = b^2 - 4ac < 200^2 - 4\cdot 101\cdot 101 = 40000 - 40804 < 0,$$

и, значит, уравнение не имеет решений.

9.4. Ответ: **а)** нет, нельзя, $a \in \left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$; **б)** да, можно.

а) Числа $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $a = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ удовлетворяют условию. Непосредственной подстановкой легко проверить, что тогда $a^2 - a = 1$ и $a^3 - 2a = 1$.

Покажем, что только эти не целые числа удовлетворяют условию. Действительно, пусть $a^2 - a = n$ и $a^3 - 2a = m$, где $n, m \in Z$, или, что то же самое,

$$a^2 - a - n = 0 \qquad (*)$$

и $a^3 - 2a - m = 0$. Тогда $m + 2a = a^3 = a\cdot a^2 = a(a+n) = a^2 + an = a + n + an$, откуда $(n-1)a = m - n$.

Заметим, что из последнего равенства следует $n=1$, ибо иначе получаем $a=\dfrac{m-n}{n-1}$, значит, a — рациональное число, а так как уравнение $(*)$ имеет целые коэффициенты и старший из них равен 1, то число a является целым.

Итак, $n=1$, тогда $m-n=0$, т.е. $m=n=1$. Так как $n=1$, то $a^2-a-1=0$, но корнями этого уравнения и являются числа $a_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $a_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Остается непосредственной подстановкой проверить, что эти числа удовлетворяют также условию $a^3-2a-1=0$.

б) Аналогично, пусть $b^2-b=n$ и $b^3+b=m$, где $n,m\in Z$, или, что то же самое,

$$b^2-b-n=0 \qquad (**)$$

и $b^3+b-m=0$. Тогда $m-b=b^3=b\cdot b^2=b(b+n)=b^2+bn=b+n+bn$, откуда имеем, что $(n+2)b=m-n$. Заметим, что $n\neq-2$, ибо иначе $b^2-b+2=0$, но это квадратное уравнение не имеет решений. Поэтому получаем, что $b=\dfrac{m-n}{n+2}$, значит, b — рациональное число, а так как уравнение $(**)$ имеет целые коэффициенты и старший из них равен 1, то число b является целым.

11 – 11' классы

11.1. Пусть $m=ad$ и $n=bd$, где $d=(m;n)$. Тогда $[m;n]=abd$, $\dfrac{m}{n}=\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{n}{m}=\dfrac{b}{a}$. Заметим, что m делит n тогда и только тогда, когда $m=(m,n)=d$, т.е. тогда и только тогда, когда $a=1$. Поэтому

$$\frac{[m;n]}{(m;n)}+\frac{m}{n}=\frac{(m;n)}{[m;n]}+\frac{n}{m}\iff ab+\frac{a}{b}=\frac{1}{ab}+\frac{b}{a}\iff$$

$$\iff a^2b^2+a^2=1+b^2\iff(a^2-1)(b^2+1)=0\iff a=1\iff m \text{ делит } n,$$

что и требовалось доказать.

11.2. Ответ: 15 узлов.

Так как каждая из пяти „горизонтальных“ прямых, проходящих через узлы квадрата (см. рис. 1), содержит по 5 узлов, то в каждом горизонтальном ряду, чтобы условие задачи было выполнено, необходимо стереть хотя бы по 3 узла. Значит, всего нужно стереть не менее $5\cdot3=15$ узлов.

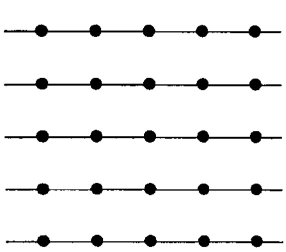


Рис. 1

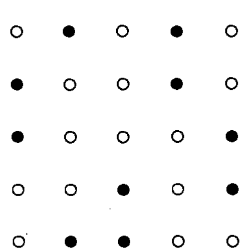


Рис. 2

С другой стороны, как показывает рис. 2, на котором стёртые узлы отмечены светлыми кружочками, можно стереть 15 узлов так, чтобы выполнялось условие задачи.

11.3. Ответ: $\alpha\in\{-2,0,1,3\}$.

Пусть имеет место равенство

$$x^5-\alpha x+x-1=f(x)g(x). \qquad (1)$$

Сравнивая старшие коэффициенты многочленов в левой и правой частях (1), видим, что старшие коэффициенты у f и g оба равны 1 или оба равны -1. Домножив в случае необходимости оба многочлена f и g на -1, можем считать, что старшие коэффициенты у f и g оба равны 1.

Пусть, для определенности, степень многочлена f не превосходит степени многочлена g. Тогда возможны два случая.

1. Степень многочлена f равна 1, тогда $f(x) = x - a$ для некоторого целого a. Подставляя $x = a$ в обе части (1), получим $a^5 - \alpha a^3 + a - 1 = 0$. Из последнего равенства следует, что число (-1) делится на a. Тогда $a = 1$ или $a = -1$. В случае $a = 1$ находим $\alpha = 1$, а при $a = -1$ получим $\alpha = 3$.

2. Степень многочлена f равна 2, тогда степень многочлена g равна 3. Сравнивая свободные члены в левой и правой частях равенства (1), замечаем, что свободные член f и g равен 1 и -1 соответственно, или -1 и 1 соответственно. Поэтому (1) можно представить в виде

$$x^5 - \alpha x^3 + x - 1 = (x^2 + bx \pm 1)(x^3 + cx^2 + dx \mp 1). \qquad (2)$$

Сравнивая коэффициенты при x^4 в левой и правой частях (2), получим $c = -b$, и тогда (2) перепишется в виде

$$x^5 - \alpha x^3 + x - 1 = (x^2 + bx \pm 1)(x^3 - bx^2 + dx \mp 1). \qquad (3)$$

Раскрывая скобки в правой части (3) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$x^5 - \alpha x^3 + x - 1 = x^5 + (d - b^2 \pm 1)x^3 + (bd \mp b \mp 1)x^2 \pm (d - b)x - 1. \qquad (4)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях (4), получим две возможные системы уравнений:

$$A)\begin{cases} d - b^2 + 1 = -\alpha, \\ bd - b - 1 = 0, \\ d - b = 1, \end{cases} \qquad B)\begin{cases} d - b^2 - 1 = -\alpha, \\ bd + b + 1 = 0, \\ b - d = 1. \end{cases}$$

В случае А) из двух последних уравнений системы находим

$$0 = bd - b - 1 = b(b+1) - b - 1 = b^2 - 1.$$

Поэтому $b = -1$ или $b = 1$, а $d = 0$ или $d = 2$ соответственно. Тогда из первого уравнения этой системы получим $\alpha = 0$ или $\alpha = -2$ соответственно.

В случае Б) из последних двух уравнений системы получаем $b^2 + 1 = 0$, что невозможно.

Осталось заметить, что все найденные значения $\alpha = 0, -2, 1, 3$ подходят, так как при этих значениях имеют место следующие разложения

$$x^5 + x - 1 = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1), \quad x^5 + 2x^3 + x - 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 2x - 1);$$

$$x^5 - x^3 + x - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + 1), \quad x^5 - 3x^3 + x - 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x - 1).$$

11.4. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Заметим, что

$$\angle CB_1A_1 = \angle CBA, \qquad (1)$$

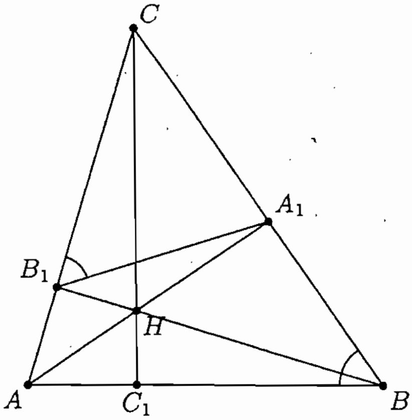


Рис. 1

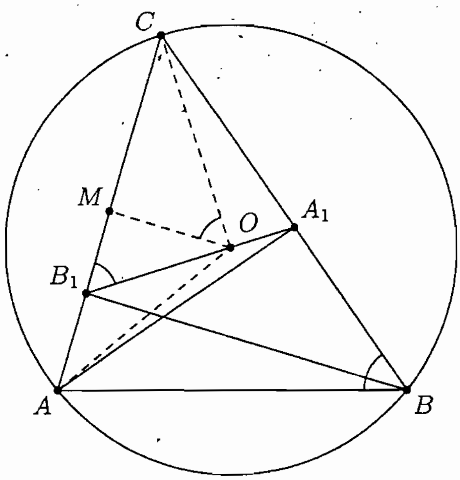


Рис. 2

так как это равносильно равенству $\angle AB_1A_1 + \angle CBA = 180°$ (см. рис. 1), которое верно, поскольку окружность с диаметром AB проходит через точки B_1, A_1.

Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC и $R = OC$ — ее радиус. Построим высоту OM треугольника A_1CB_1 (см. рис. 2). Так как $\angle COA$ — центральный угол, а $\angle CBA$ — вписанный угол, опирающиеся на одну и ту же дугу AC, то $\angle COA = 2\angle CBA$. Поэтому $\angle COM = 0,5\angle COA = \angle CBA$.

Таким образом, из (1) теперь получаем равенство углов $\angle COM = \angle CB_1A_1$, из которого следует, что $CO \perp B_1A_1$ ($\angle CB_1O + \angle OCB_1 = \angle COM + \angle OCB_1 = 90°$).

Далее получаем

$$R = OC = CB_1 \sin \angle CB_1O = CB_1 \sin \angle B = CB \cos \angle C \sin \angle B. \tag{2}$$

Из теоремы синусов для треугольника ABC имеем $BC = 2R \sin \angle A$. Подставляя это значение в (2) получим

$$R = 2R \cos \angle C \sin \angle B \sin \angle A,$$

откуда и следует требуемый результат.

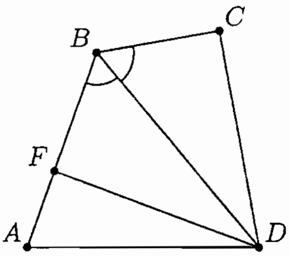
РЕШЕНИЯ

Второй день

8 класс

8.5. Ответ: $\Gamma = 0$.

Имеем $MA\Gamma MA = A + 10M + 100\Gamma + 1000A + 10000M = 1001(A + 10M) + 100\Gamma = 13\cdot 77(A+10M)+100\Gamma$. Так как число $MA\Gamma MA$ делится на 13, то и число 100Γ должно делиться на 13, а, следовательно, и Γ должно делиться на 13. Но единственной цифрой, делящейся на 13, является 0, т.е. $\Gamma = 0$.



8.6. Так как $AB > BC$, то на стороне AB можно отметить точку F так, что $BF = BC$. Тогда треугольники DBF и DBC равны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $DF = DC$ как соответственные стороны. Из неравенства треугольника в треугольнике AFD имеем $AD + AF > DF$. Прибавив к обеим частям этого неравенства FB, получим $AD + AF + FB > DF + FB$ или $AD + AB > DC + BC$, откуда, с учетом $AB = DC$, получим $AD > BC$, что и требовалось.

8.7. Ответ: **а)** не существует; **б)** существует, например, длины катетов равны 28 и 35.

а) Предположим, что такой прямоугольный треугольник существует и длины его катетов — a и b. По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = 2008$. Так как сумма четная, то оба слагаемых имеют одну четность.

Пусть $a = 2p$, $b = 2q$. Тогда $4p^2 + 4q^2 = 2008$, откуда $p^2 + q^2 = 502$. Опять сумма четная, следовательно, либо $p = 2m$, $q = 2n$ и тогда $4(m^2+n^2) = 502$, что невозможно, либо $p = 2m+1$, $q = 2n+1$ и тогда $4(m^2+m+n^2+n)+2 = 502$, т.е. $4(m^2+m+n^2+n) = 500$, $(m^2+m)+(n^2+n) = 125$, что также невозможно, так как в левой части последнего равенства стоит сумма двух четных чисел.

Если же $a = 2p+1$, $b = 2q+1$, т $4p^2 + 4p + 1 + 4q^2 + 4q + 1 = 2008$, что невозможно, ибо число в правой части равенства делится на 4, а число в левой части — нет.

б) Заметим, что $2009 = 41 \cdot 49$. Можно попробовать подобрать требуемую пару чисел вида $a = 7p$, $b = 7q$. Тогда $p^2 + q^2 = 41$ и небольшой перебор ($p \leqslant \sqrt{41} < 7$) позволяет найти требуемые числа $p = 4$, $q = 5$. Откуда $a = 28$, $b = 35$.

8.8. Ответ: **а)** да, можно; **б)** нет, нельзя.

а) Разобьём доску 3×4 на тройки клеток так, как показано на рис. 1, на котором клетки одной тройки отмечены одинаковыми цифрами. Каждая из этих троек такова, что в ней есть клетка, из которой шахматный конь за один свой ход может попасть в любую из остальных 2-х клеток этой тройки. Такую клетку назовём центральной клеткой тройки (см. рис. 2, на котором клетки тройки выделены, а её центральная клетка отмечена буквой „ц"). Заметим, что если в первоначальной раскраске центральная клетка тройки белая, то две остальные клетки этой тройки — чёрные, и наоборот, если центральная клетка тройки чёрная, то две остальные её клетки — белые. Легко видеть, что цвета клеток каждой тройки, перекрашивая только пары клеток этой тройки, можно изменить на противоположный. Действительно, обозначим через I

1	3	4	2
4	2	1	3
1	3	4	2

Рис. 1

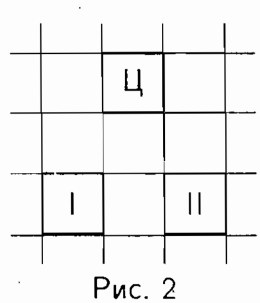


Рис. 2

и II клетки тройки, отличные от центральной (см. рис. 2). Тогда, если центральная клетка чёрная, то, применяя последовательно перекрашивания к парам: (ц, I), (ц, II), (ц, I), (ц, II), — получим, что центральная клетка станет белой, а две остальные клетки тройки — чёрными. Если центральная клетка белая, то достаточно применить перекрашивания к парам (ц, I) и (ц, II), и центральная клетка тройки станет чёрной, а две остальные её клетки — белыми. Применяя такие перекрашивания к каждой тройке клеток, на которые мы вначале разбили доску, получим в результате доску, у которой каждая клетка будет окрашена в цвет, противоположный первоначальному.

б) Допустим, что нам удалось перекрасить доску так, как требуется в условии задачи, и пусть при этом было сделано N ходов. В любом ходе участвуют одна первоначально белая и одна первоначально чёрная клетки, поскольку если шахматный конь из одной клетки может попасть в другую, то в исходной чёрно-белой раскраске эти клетки имеют разные цвета. Чтобы белая клетка стала чёрной, она должна участвовать в $3k+2$ ходах. Значит, суммируя по всем 8-и белым клеткам, получаем, что $N=(3k_1+2)+\ldots+$ $+(3k_8+2)=3t+1$. С другой стороны, чтобы чёрная клетка стала белой, она должна участвовать в $3l+1$ ходах. Значит, суммируя по всем 8-и чёрным клеткам, получаем, что $N=(3l_1+1)+\ldots+(3l_8+1)=3s+2$. Итак, N при делении на 3 должно давать и остаток 1 и остаток 2, чего быть не может. Полученное противоречие доказывает невозможность требуемой перекраски доски с помощью указанных ходов.

9 – 9' классы

9.5. Ответ: 9202921.

Имеем

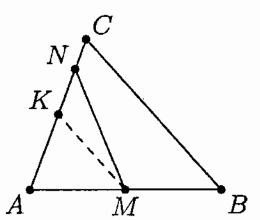
$$БАРАБАН=Н+10А+10^2Б+10^3А+10^4Р+10^5А+10^6Б=$$
$$=Н+101010А+1000100Б+10000Р=Н+91\cdot1110А+91\cdot10990Б+91\cdot110Р+10(Б-Р).$$

Поскольку число $БАРАБАН$ делится на 91, то и число $10(Б-Р)+Н$ должно делиться на 91. Заметим, что $-90\leqslant 10(Б-Р)+Н\leqslant 99$. Следовательно, либо $10(Б-Р)+Н=$ $=0$, либо $10(Б-Р)+Н=91$. Так как по условию $Б\neq Р$, то число $10(Б-Р)+Н$ двузначное. Но единственным двузначным числом, делящимся на 91, является число 91. Откуда $Б$=9, $Р=0$, $Н=1$. Поэтому наименьшим числом, удовлетворяющим условию задачи, является 9202921, поскольку наименьшее значение, которое может принимать цифра $А$ является 2.

Заметим, что, воспользовавшись признаками деления на 7 и 13, можно было упростить начало решения:

$$БАРАБАН \,\vdots\, 91 \iff БАРА-БАН \,\vdots\, 91 \iff 91А+910Б+10Р-10Б+Н \,\vdots\, 91$$

9.6. Пусть K — середина стороны AC. Тогда MK — средняя линия треугольника ABC, и поэтому $MK=0,5BC$. Из неравенства треугольника следует $MK+KN>MN$. Поэтому



$$0,5(AC+BC)=KC+MK=(KN+NC)+MK=$$
$$=(KN+MK)+NC>MN+NC.$$

Умножая обе части этого неравенства на 2, получим требуемое.

9.7. Докажем, что

$$\frac{bc}{b+c+a^2}\leqslant\frac{1}{4a-1}\ (1).$$

Действительно, избавляясь от положительных знаменателей, получим, что

$$(1) \Longleftrightarrow 4abc - bc \leqslant a^2 + b + c \Longleftrightarrow [abc = 1] \Longleftrightarrow a^2 + b + c + bc \geqslant 4.$$

Последнее следует из того, что по неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом $a^2 + b + c + bc \geqslant 4\sqrt[4]{a^2 \cdot b \cdot c \cdot bc} = 4\sqrt[4]{a^2b^2c^2} = [abc = 1] = 4$.

Аналогично,

$$\frac{ca}{c + a + b^2} \leqslant \frac{1}{4b - 1} \quad (2), \qquad \frac{ab}{a + b + c^2} \leqslant \frac{1}{4c - 1} \quad (3).$$

Складывая $(1), (2), (3)$, получаем требуемое неравенство. Равенство достигается при $a = b = c = 1$.

9.8. Ответ: нет, нельзя.

Заметим, что если из одной клетки шахматный конь может попасть в другую за один ход, то в исходной черно-белой раскраске одна из этих клеток была черной, а другая — белой. Допустим, что нам удалось получить требуемым образом раскрашенную доску. Тогда любая первоначально черная клетка перекрашивалась $3k + 1$ раз (значения k свои для каждой клетки). Аналогично, любая первоначально черная клетка перекрашивалась $3m + 2$ раз (значения m свои для каждой клетки) ($k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Но, так как любое перекрашивание затрагивает одну первоначально черную и одну первоначально белую клетку, то, подсчитывая двумя способами, получаем, что всего было произведено

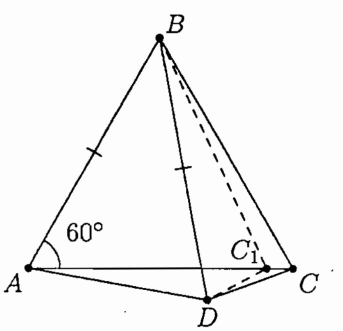
$$(3b_1+1)+(3b_2+1)+(3b_3+1)+\ldots+(3b_{32}+1) = (3w_1+2)+(3w_2+2)+(3w_3+2)+\ldots+(3w_{32}+2)$$

перекрашиваний (слева суммируем по первоначально черным, справа по первоначально белым клеткам). Но слева сумма дает остаток 2, а справа сумма дает остаток 1 при делении на 3 ($32 \equiv 2 \bmod 3$ и $2 \cdot 32 \equiv 1 \bmod 3$). Противоречие. Значит, получить требуемым образом раскрашенную доску не возможно.

11 – 11' классы

11.5. Ответ: $60°$.

Отложим на луче AC отрезок $AC_1 = AB$. Тогда треугольник ABC_1 равносторонний (так как $\angle BAC_1 = 60°$), откуда $BC_1 = BA = BD$. Рассмотрим окружность с центром в точке B и радиусом BA. В ней $\angle ABC_1 = 60°$ — центральный, откуда $\smile ADC_1 = 60°$. Тогда дополнительная дуга (на которую опирается вписанный угол ADC_1) равна $300°$, и тогда $\angle ADC_1 = 0,5 \cdot 300° = 150°$. Поскольку по условию $\angle ADC = 150°$, заключаем, что точка C_1 совпадает с точкой C. Поэтому искомый угол



$$\angle ACB = \angle AC_1B = 60°.$$

11.6. Очевидно, что при любом натуральном n верно неравенство

$$\frac{1}{n^{1/2} \cdot (n+1)^{3/2}} < \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{1004^{1/2} \cdot 1005^{3/2}} + \frac{1}{1005^{1/2} \cdot 1006^{3/2}} + \ldots + \frac{1}{2007^{1/2} \cdot 2008^{3/2}} <$$

$$< \left(\frac{1}{1004} - \frac{1}{1005}\right) + \left(\frac{1}{1005} - \frac{1}{1006}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2007} - \frac{1}{2008}\right) = \frac{1}{1004} - \frac{1}{2008} = \frac{1}{2008}$$

что и требовалось доказать.

11.7. Ответ: $f(x) \equiv c$, где c — произвольная константа.

Обозначим $f(0) = c$. Положим в данном уравнении

$$f(x + y^2) + f(x^2 + y) = 2f(xy) \tag{1}$$

$y = 0$, получим

$$f(x) + f(x^2) = 2c. \tag{2}$$

Заменив в (2) x на $-x$, получим

$$2c = f(-x) + f((-x)^2) = f(-x) + f(x^2). \tag{3}$$

Из (2) и (3) получаем $f(-x) = f(x)$ для всех действительных x, т.е. искомая функция четная. Но тогда, заменив в (1) y на $-y$, получим

$$f(x + y^2) + f(x^2 - y) = f(x + (-y)^2) + f(x^2 - y) = 2f(x(-y)) = 2f(xy).$$

Сравнивая это равенство с (1), находим $f(x^2 + y) = f(x^2 - y)$ для всех действительных x, y. Полагая в этом равенстве $y = x^2$, получаем $f(2x^2) = c$. Обозначая $2x^2 = t$, получаем $f(t) = c$ для всех неотрицательных t, а с учетом четности функции f и для всех действительных t.

Осталось заметить, что любая функция, тождественно равная константе, удовлетворяет исходному уравнению (1).

11.8. Ответ: n, кратные 3.

Допустим, что нам удалось перекрасить доску так, как требуется в условии задачи, и пусть при этом было сделано N ходов. В любом ходе участвуют одна первоначально белая и одна первоначально чёрная клетки, поскольку если шахматный конь из одной клетки может попасть в другую, то в исходной чёрно-белой раскраске эти клетки имеют разные цвета. Чтобы белая клетка стала чёрной, она должна участвовать в $3k + 2$ ходах. Значит, суммируя по всем $2n^2$ белым клеткам, получаем, что $N = (3k_1 + 2) + \ldots + (3k_{2n^2} + 2) = 3t + 4n^2$. С другой стороны, чтобы чёрная клетка стала белой, она должна участвовать в $3l + 1$ ходах. Значит, суммируя по всем $2n^2$ чёрным клеткам, получаем, что $N = (3l_1 + 1) + \ldots + (3l_{2n^2} + 1) = 3s + 2n^2$. Следовательно, если можно перекрасить доску так, как требуется в условии задач, то необходимо, чтобы число $2n^2$ делилось на 3, т. е. чтобы n было кратно 3.

Покажем, как при n, кратном 3, перекрасить доску с помощью указанных в условии задачи ходов, так, чтобы каждая клетка, бывшая в первоначальной раскраске белой, стала чёрной, а каждая чёрная — белой. Ясно, что для этого достаточно показать, как перекрасить доску 6×6. Разобьём доску 6×6 на двенадцать троек клеток так, как показано на рисунке, на котором клетки одной тройки отмечены одинаковыми цифрами. Каждая из этих троек такова, что в ней есть клетка, из которой шахматный конь за один свой ход может попасть в любую из остальных 2-х клеток этой тройки. Такую клетку назовём центральной клеткой тройки, и будем обозначать её буквой „ц“. Заметим, что если в первоначальной

4	8	10	11	7	3
8	11	4	3	10	7
12	4	8	7	3	9
11	1	5	6	2	10
5	12	1	2	9	6
1	5	9	12	6	2

раскраске центральная клетка тройки белая, то две остальные клетки этой тройки — чёрные, и наоборот, если центральная клетка тройки чёрная, то две остальные её клетки — белые. Легко видеть, что цвета клеток каждой тройки, перекрашивая только пары клеток этой тройки, можно изменить на противоположный. Действительно, обозначим через I и II клетки тройки, отличные от центральной. Тогда, если центральная клетка чёрная, то, применяя последовательно перекрашивания к парам: (ц, I), (ц, II), (ц, I), (ц, II), — получим, что центральная клетка станет белой, а две остальные клетки тройки — чёрными. Если центральная клетка белая, то достаточно применить перекрашивания к парам (ц, I) и (ц, II), и центральная клетка тройки станет чёрной, а две остальные её клетки — белыми. Применяя такие перекрашивания к каждой тройке клеток, на которые мы вначале разбили доску 6×6, получим в результате доску, у которой каждая клетка будет окрашена в цвет, противоположный первоначальному.