**Государственное учреждение образования**

**«Каменская средняя школа»**

**Нахождение области значений функции**

Подготовила Шакурина Г.В.,

учитель математики

**2023 г.**

Данная тема имеет практическое значение. В школьном курсе математики изучается тема “Область значения функции”. Такие задачи обязательно содержатся в заданиях различных математических тестов, в частности в заданиях ЦТ. Результаты работы можно использовать на уроках и дополнительных занятиях при подготовке учащихся выпускным и вступительным экзаменам, при самостоятельной подготовке учащихся по данной теме.

Для успешного нахождения множества значений функции надо хорошо знать свойства основных элементарных функций, особенно их области определения, области значений и характер монотонности. Приведём свойства непрерывныхмонотонных функций, наиболее часто используемые при нахождении множества значений функций.

1. Если функция f(x) непрерывна и возрастает на отрезке [a;b], то множество значений функции на этом отрезке есть отрезок [f(a),f(b)]. При этом каждое значение А https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/592706/img1.gif [f(a),f(b)] функция принимает ровно при одном значении x принадлежит [a,b], т.е уравнение f(x) = А имеет единственный корень на отрезке [a,b]. Если же f(x) – непрерывная и убывающая на отрезке [a,b] функция, то её множество значений на [a,b] есть отрезок [f(a),f(b)].
2. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и m = min f(x), M = max f(x) – её наименьшее и наибольшее значение на этом отрезке, то множество значений f(x) на [a,b] есть отрезок [m;M].

 Рассмотрим способы нахождения областей значений функций.

* метод оценок
* метод обратных функций
* метод непосредственных вычислений
* графический метод

- метод введения параметра

Раскроем суть этих методов на конкретных примерах.

**Метод оценок**

Пример 1. Найдите множество значений функци  y=5 -http://viripit.ru/mate/p3001.gif.

Решение.

Из определения квадратного корня следует, что 4 –х2.> 0, решая квадратичное неравенство получаем, что -2http://viripit.ru/mate/zmr.gifxhttp://viripit.ru/mate/zmr.gif2. разобьем промежуток [-2; 2] на два промежутка [-2; 0] и (0; 2]. Первому промежутку соответствует неравенство -2http://viripit.ru/mate/zmr.gifxhttp://viripit.ru/mate/zmr.gif0, а второму соответствует 0 < xhttp://viripit.ru/mate/zmr.gif2. На первом промежутке переменная х принимает неотрицательные значения, а на втором - положительные. Возведем в квадрат каждое из этих двойных неравенств, в результате получим 0http://viripit.ru/mate/zmr.gifx2http://viripit.ru/mate/zmr.gif4. Умножим все три части неравенства на  - 1,  получим неравенство - 4http://viripit.ru/mate/zmr.gif- x2http://viripit.ru/mate/zmr.gif0. Прибавим к трем частям неравенства 4 и получим 0http://viripit.ru/mate/zmr.gif  4 - x2http://viripit.ru/mate/zmr.gif  4.  
Введем вспомогательную переменную предположив, что

 t = 4 - x2, где 0http://viripit.ru/mate/zmr.gif  thttp://viripit.ru/mate/zmr.gif4.

Функция y =http://viripit.ru/mate/p3002.gifна указанном промежутке непрерывна и возрастает, поэтому свои наименьшее и наибольшее значения принимает на концах промежутка и, следовательно, 0http://viripit.ru/mate/zmr.gif http://viripit.ru/mate/p3002.gifhttp://viripit.ru/mate/zmr.gif  2 тогда произведя обратную замену переменных получим неравенство  0http://viripit.ru/mate/zmr.gif http://viripit.ru/mate/p3001.gifhttp://viripit.ru/mate/zmr.gif 2. Прибавим к трем частя последнего двойного неравенств 5, умножив его предварительно на - 1, получим 3http://viripit.ru/mate/zmr.gif  5 -http://viripit.ru/mate/p3001.gifhttp://viripit.ru/mate/zmr.gif  5.Множество значений функции y = 5 -http://viripit.ru/mate/p3001.gifявляется множество [3; 5].

**Метод обратных функций**

Пример 2. Найдите множество значений функции https://pandia.ru/text/77/355/images/image014_33.gif

Решение.

Выразим х через у и решим уравнение https://pandia.ru/text/77/355/images/image015_29.gif,https://pandia.ru/text/77/355/images/image016_26.gif, https://pandia.ru/text/77/355/images/image017_24.gif, решим неравенство https://pandia.ru/text/77/355/images/image018_19.gif методом интервалов, получим https://pandia.ru/text/77/355/images/image019_20.gif.

**Метод непосредственных вычислений**

В случае, когда область определения функции содержит конечное число значений аргумента или  количество значений не велико, или множество значений аргумента может быть описано с помощью конечного числа формул, так бывает в случае рассмотрения тригонометрических функций, обычно множество значений функции находят путем непосредственных вычислений.

Пример 3. Укажите множество значений функции y = 11 -http://viripit.ru/mate/p3011.gif.

Решение.

Найдем область определения данной функции. Так как в формуле задающей функцию есть квадратный корень, то согласно определению квадратного корня потребуем, чтобы подкоренное выражение было неотрицательным:

10х - х2 -25http://viripit.ru/mate/zbr.gif0;

-(х - 5)2http://viripit.ru/mate/zbr.gif0;

(х - 5)2http://viripit.ru/mate/zmr.gif0; Откудах = 5. Таким образом область определения данной функции состоит из одного числа, следовательно, множество значений функции состоит из одного числа и Е(у) = {11}.

**Графический метод**

 Пример 4. Найти множество значений функции: https://pandia.ru/text/77/355/images/image097_1.gif.

Решение.

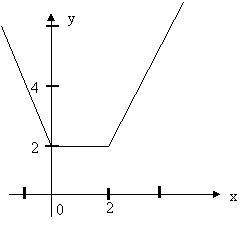
Рассмотрим знаки каждого из двух выражений под знаком модуля на промежутках

https://pandia.ru/text/77/355/images/image098_0.gif

1) https://pandia.ru/text/77/355/images/image100_0.gif, https://pandia.ru/text/77/355/images/image101_1.gif,

2) https://pandia.ru/text/77/355/images/image102_0.gif, https://pandia.ru/text/77/355/images/image103_1.gif,

  3) https://pandia.ru/text/77/355/images/image105_1.gif, https://pandia.ru/text/77/355/images/image106_1.gif.https://pandia.ru/text/77/355/images/image101_1.gif.



https://pandia.ru/text/77/355/images/image107_0.gif.

**Метод введения параметра**

Пример 5. Найдите область значений E(f) функции

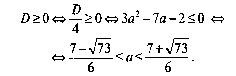
https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/592706/img4.gif Решение.

Решим пример методом введения параметра, согласно которому E(f)совпадает с множеством значений параметра а, для которых уравнение

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/592706/img5.gif

имеет хотя бы один корень.

При а=2 уравнение является линейным – 4х – 5 = 0 с ненулевым коэффициентом при неизвестной х , поэтому имеет решение. При а≠2 уравнение является квадратным, поэтому оно разрешимо тогда и только тогда, когда его дискриминант



Так как точка а = 2 принадлежит отрезку

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/592706/img7.gif то искомым множеством значений параметра а,значит, и областью значений E(f) будет весь отрезок.